Fonctions trigonométriques

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Les **fonctions trigonométriques** sont des fonctions dont la variable est une mesure d'angle. Elles modélisent des phénomènes périodiques. Les trois fonctions trigonométriques les plus utilisées sont le **sinus** (noté sin), le **cosinus** (cos) et la **tangente** (tan).

I. Les fonctions trigonométriques de TS

En TS on étudie deux fonctions trigonométriques : les fonctions cosinus et sinus.

Vous avez défini le cosinus et le sinus d'un réel donné en seconde (voir rappels sur le blog). Il n'est pas difficile à partir de là de passer aux fonctions cosinus et sinus.

Définitions

La fonction qui à tout nombre réel *x*, associe le nombre $\cos(x)$ est appelée fonction cosinus :

cos : $x \longmapsto \cos(x)$.

La fonction qui à tout nombre réel *x*, associe le nombre $\sin(x)$ est appelée fonction sinus :

sin : $x \longmapsto \sin(x)$.

Propriété admise

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x)=\cos(x)$ et $\cos'(x)=-\sin(x)$

II. Parité et périodicité d'une fonction

Définitions

Soit *f* définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0

f est une fonction paire si pour tout réel de I, $f(-x)=f(x)$

Interprétation graphique : la courbe représentative de *f* est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

f est une fonction impaire si pour tout réel de I, $f(-x)=-f(x)$

Interprétation graphique : la courbe représentative de *f* est symétrique par rapport à l'origine du repère.

f est une fonction périodique de période T si pour tout réel de I, $f(x+\mathrm{T})=f(x)$

Interprétation graphique : la courbe représentative de *f* va se répéter à l'identique par translation.

Exercices

1. Étudier la parité des fonctions *f, g, h* et *i* définies respectivement par :

$f(x)=x^2$ $\qquad g(x)=x^3$ $\qquad h(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad i(x)=\mathrm{e}^x$.

2. Montrer la fonction *f* définie par $f(x)=\sin(4x)+\cos(2x)$ est π -périodique

En pratique

On cherche toujours à réduire le domaine d'étude d'une fonction.

Si une fonction est paire ou impaire sur $\mathbb{R}$, il suffit de l'étudier sur $[0;+\infty[$ et ensuite d'utiliser les propriétés de la symétrie (axiale ou centrale) pour en déduire le tableau de variations et la courbe sur $\mathbb{R}$.

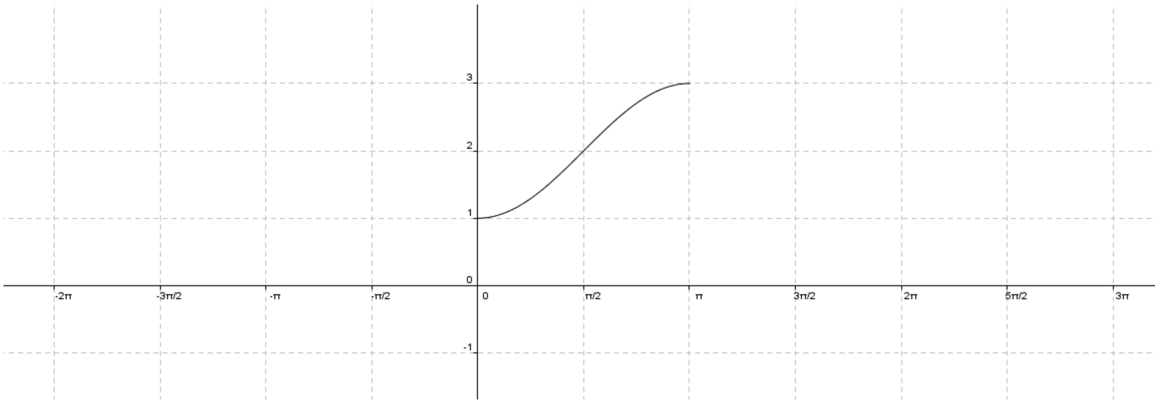
Si une fonction est T-périodique, il suffit de l'étudier et la tracer sur un intervalle de longueur T puis on obtient son tracé complet par translation de vecteur T $\vec{i}$.

Exercice n°1 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2-\cos(x)$

Sa courbe C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, sur l'intervalle [0 ; π].

a) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Compléter C_f en sur [- π ; 0] en justifiant.

b) Exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Compléter C_f sur [π ; 3π] en justifiant.

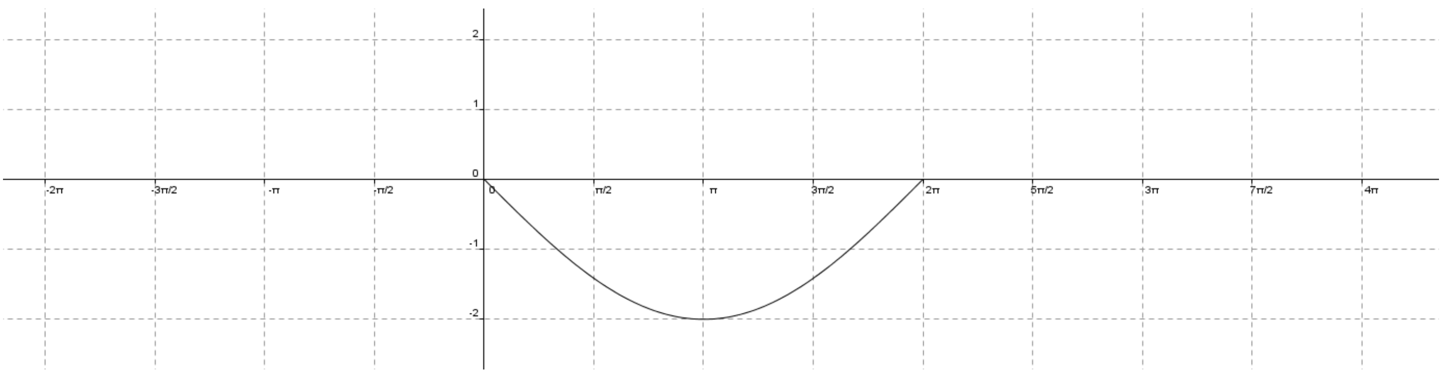


Exercice n°2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Sa courbe C_g est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal sur [0 ; 2π].

a) Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Compléter C_g sur [-2π ; 0] en justifiant.

b) Exprimer $g(x+4\pi)$ en fonction de $g(x)$. Compléter C_g sur [2π : 4 π] en justifiant.



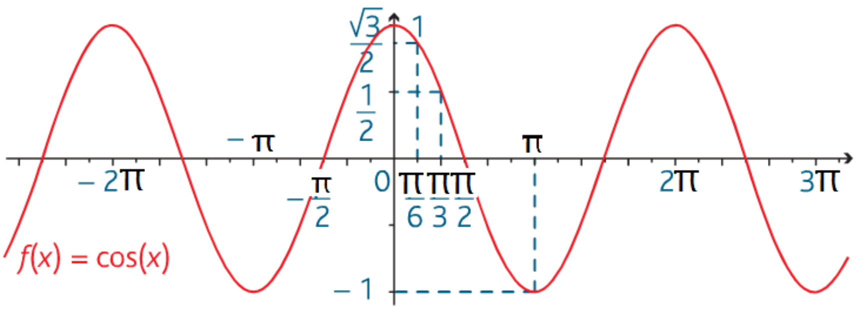
III La fonction cosinus

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$
- Pour tout réel x, $\cos(x)=\cos(x+2\pi)$, la fonction cosinus est donc **2π-périodique** .
  Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi;+\pi]$
- Pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos(x)$. La fonction cosinus est donc une **fonction paire**.
  Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On peut donc réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0;+\pi]$

Étudier les variations de la fonction cosinus c'est étudier le signe de sa dérivée.
Or, pour tout réel x, $\cos'(x)=-\sin(x)$.

x	0		$+\pi$
signe de $\sin(x)$	0	$+$	
signe de $-\sin(x)$	0	$-$	
variations de $\cos(x)$	1	↘	-1

On obtient la courbe représentative :
Sur $[0;+\pi]$ puis sur $[-\pi;+\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,
puis sur $\mathbb{R}$ par translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$.



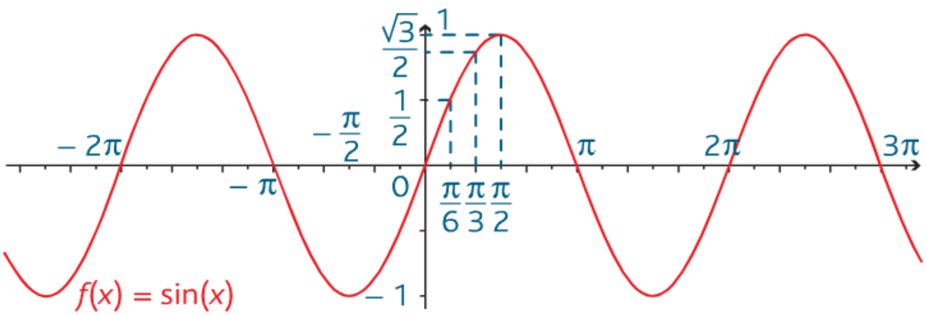
III La fonction sinus

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$
- Pour tout réel x, $\sin(x)=\sin(x+2\pi)$, la fonction cosinus est donc **2π-périodique** .
  Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi;+\pi]$
- Pour tout réel x, $\sin(-x)=-\sin(x)$. La fonction cosinus est donc une **fonction impaire**.
  Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- On peut donc réduire le domaine d'étude à l'intervalle $[0;+\pi]$

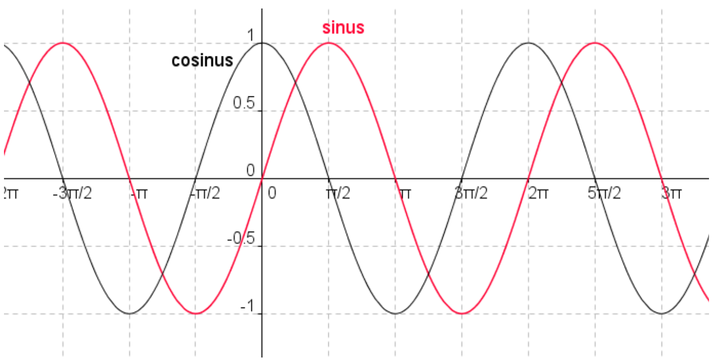
Étudier les variations de la fonction cosinus c'est étudier le signe de sa dérivée.
Or, pour tout réel x, $\sin'(x)=\cos(x)$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\cos x$		$+$		$-$	
variations de $\sin x$	0	↗	1	↘	0

On obtient la courbe représentative :
Sur $[0;+\pi]$ puis sur $[-\pi;+\pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère,
puis sur $\mathbb{R}$ par translations successives de vecteur $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$.



Les courbes des fonctions sinus et cosinus sur un même graphique : on parle de sinusoïdales.



IV Limites

Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini.
Pour étudier les limites au voisinage de l'infini de fonctions trigonométriques, on utilise les théorèmes de comparaisons / théorème des gendarmes.

Exercices : Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)+5}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10-x}{5-\cos(x)}$

Une limite à connaître :

Propriété : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

Preuve Posons $g(x) = \sin(x)$.

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc , $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = g'(0) = \cos(0) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

V Inéquations trigonométriques

Pour étudier les variations d'une fonction, il faut étudier le signe de la dérivée et donc, dans le cas de fonctions trigonométriques, résoudre des inéquations trigonométriques.

On privilégiera l'usage du cercle trigonométrique. Une bonne connaissances des lignes trigonométriques remarquables est fort utile...

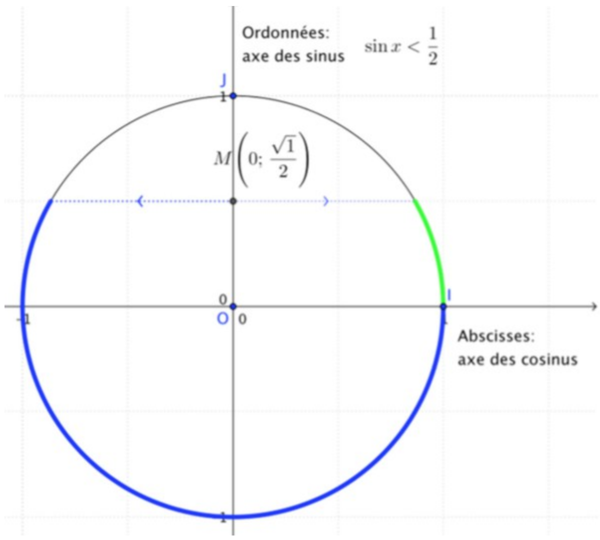
Exemple : a) Résoudre l'inéquation $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ sur [0; 2π].

On résout l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$

$\sin(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \ [2\pi]$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi]$

Sur [0; 2π] : la partie verte puis la bleue (suivre le sens direct)... S= $\left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6};2\pi\right[$

Sur [0; π] : S= $\left]0;\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6};\pi\right[$



b) Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur [0; 2π].

Sur [0; 2π] : S= $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$.