Correction 1

a. $e^3 \cdot e^4 = e^{3+4} = e^7$

b. $e^4 \cdot e^{-4} = e^{4+(-4)} \cdot e^0 = 1$

c. $\left(e^4\right)^3 \cdot e^4 = e^{3\times 4} \cdot e^4 = e^{12} \cdot e^4 = e^{12+4} = e^{16}$

d. $\dfrac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}} = \dfrac{e^{5+(-3)}}{e^{-2}} = \dfrac{e^2}{e^{-2}} = e^{2-(-2)} = e^4$

e. $\left(e^5 - e^4\right)^2 - \left(e^5 + e^4\right)^2$

$$= \left[\left(e^5\right)^2 - 2 \cdot e^5 \cdot e^4 + \left(e^4\right)^2\right] - \left[\left(e^5\right)^2 + 2 \cdot e^5 \cdot e^4 + \left(e^4\right)^2\right]$$

$$= \left(e^{10} - 2 \cdot e^9 + e^8\right) - \left(e^{10} + 2 \cdot e^9 + e^8\right) = -4 \cdot e^9$$

f. $\dfrac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2} = \dfrac{e^6 - e^3}{e^3} = \dfrac{e^6}{e^3} - \dfrac{e^3}{e^3} = e^3 - 1$

Correction 2

a. $e^5 \cdot e^6 = e^{5+6} = e^{11}$

b. $\dfrac{e^6 \cdot e^{-2}}{e^{-4}} = \dfrac{e^{6+(-2)}}{e^{-4}} = \dfrac{e^4}{e^{-4}} = e^{4-(-4)} = e^8$

c. $\left(e^3\right)^{-2} \cdot e^5 = e^{-2\times 3} \cdot e^5 = e^{-6} \cdot e^5 = e^{-6+5} = e^{-1}$

d. $\left(e^2 + e^{-2}\right) \cdot \left(e^2 - e^{-2}\right)$

$$= e^2 \cdot e^2 - e^2 \cdot e^{-2} + e^{-2} \cdot e^2 - e^{-2} \cdot e^{-2}$$

$$= e^4 - e^0 + e^0 - e^{-4} = e^4 - e^{-4}$$

Correction 3

a. On a les transformations suivantes :

$$e^x + e^{-x} = 0$$

$$e^x \cdot \left(1 + e^{-2x}\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses factuers est nul ; sachant que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ceci entraîne :

$$1 + e^{-2x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{-2x} = -1$$

Or, la fonction exponentielle étant strictement positive, cette dernière équation n'admet aucune solution :

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

b. Cette égalité peut se transformer en :

$$e^{3x+1} = e^{-2x+3}$$

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-2x+3}} = 1$$

$$e^{3x+1-(-2x+3)} = 1$$

$$e^{5x-2} = 1$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$5x - 2 = 0$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

c. On a :

$$e^{2x} - 1 = 0$$

$$e^{2x} = 1$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{0\}$

d. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$x \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} \cdot \left(x - 2\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Sachant que la fonction exponentielle est strictement positive et ne s'annule pas, on en déduit l'équation :

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \{2\}$

Correction 4

a. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} -x + 1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

Les formules de composition des limites permet d'obtenir :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} e^{-x+1} = 0$$

b. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} 2x + 1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

La composition des limites permet d'obtenir :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} e^{2x+1} = 0$$

c. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} -x^2 + 1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

L'étude de la limite de la composée de fonctions permet d'obtenir :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} e^{-x^2+1} = 0$$

d. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x \mapsto 0^+} e^x = 1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

e. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

On obtient la limite suivante :

$$\lim_{x \mapsto 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

f. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$$
Ainsi, on a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Correction 5

a. On a la transformation algébrique suivante :
$$e^{x^2}\cdot e^{-x} = e^{x^2-x} = e^{x\cdot(x-1)}$$
On a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} x\cdot(x-1) = +\infty$$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} e^{x^2}\cdot e^{-x} = \lim_{x\mapsto+\infty} e^{x\cdot(x-1)} = +\infty$$

b. On a la transformation algébrique suivante :
$$e^x\cdot\left(x^2-x+1\right) = x^2\cdot e^x - x\cdot e^x + e^x$$
D'après le cours, on a les limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^2\cdot e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} e^x\cdot\left(x^2-x+1\right) = 0$$

c. On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} e^x+1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} e^{-x}-1 = -1$$
On en déduit la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{e^x+1}{e^{-x}-1} = -\infty$$

d. On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{e^{-3x}}{x^2+1} = \frac{e^{-3x}}{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^{-3x}}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$
$$= 9\cdot\frac{e^{-3x}}{(-3x)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$
Posons le changement de variables $X = -3x$:

- lorsque x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{e^{-3x}}{\left(-3x\right)^2} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$

On a également la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$

On en déduit la valeur suivante de la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2+1} = +\infty$$

e. On a la transformation algébrique suivante :
$$e^{-x}+3x+1 = x\cdot\left(\frac{e^{-x}}{x}+3\right)+1$$
$$= x\cdot\left(-\frac{e^{-x}}{-x}+3\right)+1$$
Posons le changement de variables $X = -x$:

- lorsque x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$;
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = \lim_{X\mapsto+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Ainsi, on a la limite : $\displaystyle\lim -\frac{e^{-x}}{-x}+3 = -\infty$

On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} e^{-x}+3x+1 = \lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\left(-\frac{e^{-x}}{-x}+3\right)+1 = +\infty$$

f. On a la transformation algébrique suivante :
$$e^{-2x}-e^{-x} = e^{-2x}\cdot\left(1-e^x\right)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} e^{-2x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} 1-e^x = 1$$
On obtient ainsi la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} e^{-2x}-e^{-x} = +\infty$$

Correction 6

a. La fonction f peut être vue comme la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$$u(x) = -x \quad ; \quad u'(x) = -1$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle peremt d'obtenir l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f :
$$f(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = -e^{-x}$$

b. La fonction g est définie par le produit des fonctions u et v où :
$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^x$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = e^x$$
La formule de dérivation d'une produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x$$
$$= e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(1+x)$$

c. La fonction h est définie comme la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$$u(x) = x^2+x \quad ; \quad u'(x) = 2x+1$$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$h'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = (2x+1)\cdot e^{x^2+x}$$

d. La fonction j est définie comme l'inverse de la fonction u définie par :
$$u(x) = 1-e^x \quad ; \quad u(x) = -e^x$$
La formule de dérivation de l'inverse permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction j :
$$j'(x) = -\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^2} = -\frac{-e^x}{\left(1-e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$$

Correction 7

1. Pour que ce quotient soit définit, il faut que son dénominateur soit non-nul ; cherchons les valeurs annulant le dénominateur :
$$e^x - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad e^x = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = 0$$
L'ensemble de définition est :
$$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$$

2. La fonction f est écrit sous la forme $\dfrac{1}{u}$ où :
$$u(x) = e^x - 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$$
La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{e^x}{\big(e^x - 1\big)^2}$$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur de la fonction est strictement positif ; on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$: la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

On a les limites suivantes :

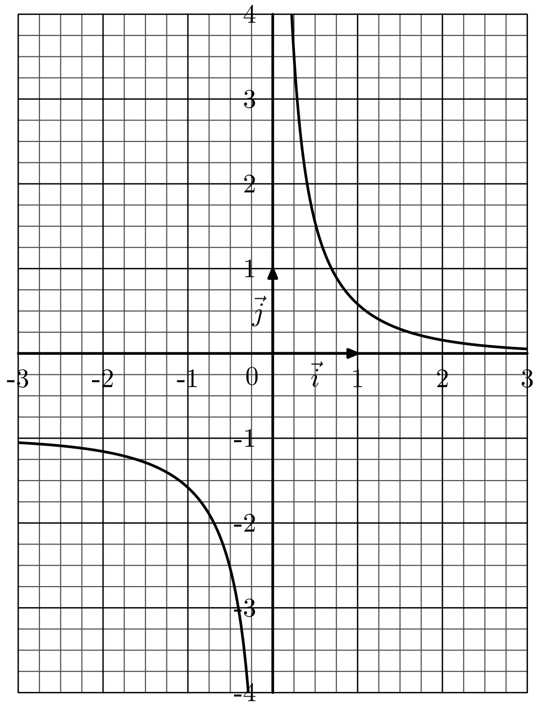
- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0$
- $\lim\limits_{x\mapsto0^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. La courbe $\mathscr{C}$ possède de trois asymptotes :
   - Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.
   - Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=-1$.
   - Une asymptote verticale d'équation $x=0$.

4. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



Correction 8

1. a. La fonction f admet pour dérivée :
$$f'(x) = 2 - 2\cdot\big(-e^{-x}\big) + 0 = 2 + 2\cdot e^{-x} = 2\cdot\big(1 + e$$
La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\big[0\,;1\big]$: la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

On a les deux valeurs suivantes pour la fonction f :

- $f(0) = 2\times0 - 2\cdot e^{-0} + \dfrac{1}{e} = -2 + \dfrac{1}{e} = -2 + e^{-1}$
- $f(1) = 2\times1 - 2\cdot e^{-1} + \dfrac{1}{e} = 2 - 2\cdot e^{-1} + e^{-1} = 2 - e^{-1}$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$:

x	0		1
Variation de f	$-2+e^{-1}$	↗	$2-e^{-1}$

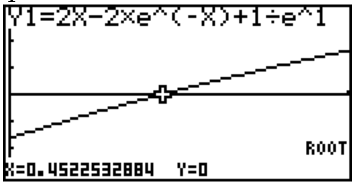
b. Sur l'intervalle $\big[0\,;\,1\big]$:
On a les deux images aux bornes de l'intervalle :
$$f(0) \simeq -1{,}6 < 0 \quad ; \quad f(1) \simeq 1{,}6 > 0$$
De plus :

- la fonction f est continue sur $\big[0\,;\,1\big]$
- la fonction f est strictement croissante sur $\big[0\,;\,1\big]$
- le nombre 0 est compris entre les images par la fonction f aux bornes de l'intervalle $\big[0\,;1\big]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ solution de l'équation :

$f(\alpha) = 0$.

Voici la capture d'écran de la calculatrice :



On obtient la valeur approchée de α au centième :

$\alpha \simeq 0{,}45$

2. On a les transformations suivantes :

$$x - e^{-x} + 1 = e^{-x} - x - e^{-1} + 1$$
$$x - e^{-x} + 1 - e^{-x} + x + e^{-1} - 1 = 0$$
$$2x - 2e^{-x} + e^{-1} = 0$$
$$2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e} = 0$$
$$f(x) = 0$$

D'après la question 1. b., cette équation admet sur l'intervalle $[0\,;1]$ le nombre α pour unique solution.

