Les nombres complexes (II)
Équations dans $\mathbb{C}$

Compétences	*Exercices corrigés*
Résoudre une équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$	*Savoir Faire 3 page 203, énoncé 2*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels	*Savoir Faire 4 page 203 ;* *83 page 214*

I Résolution d'équations du 1er degré dans $\mathbb{C}$.

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation (E) : $3iz-2+i=z-3i$

On procède comme dans $\mathbb{R}$: on regroupe les termes comprenant l'inconnue z dans l'un des membres de l'équation et les termes constants dans l'autre membre.

(E) : $3iz-2+i=z-3i \Leftrightarrow 3iz-z=-3i+2-i \Leftrightarrow z(3i-1)=-4i-2 \Leftrightarrow z=\dfrac{-4i-2}{3i-1}$

L'équation(E) admet une unique solution : le complexe $z=\dfrac{-4i-2}{3i-1}$.

La forme algébrique de z est $-1+i$.

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l’équation (E) : $z-2\overline{z}=2i$

L'équation (E) contient des z et des $\overline{z}$. La méthode précédente ne fonctionne plus.
On pose $z=x+iy$ *, on a* alors $\overline{z}=x-iy$.
On revient à la forme algébrique puis on applique la propriété sur l'égalité des nombres complexes.

(E) devient $x+iy-2(x-iy)=2i$

$x+iy-2(x-iy)=2i \Leftrightarrow x-2x+2iy+iy=2i \Leftrightarrow -x+3iy=2i \Leftrightarrow -x=0$ et $y=\dfrac{2}{3}$

L'équation(E) admet une unique solution : le complexe $z=\dfrac{2}{3}i$

Ex 9 à 11 page 210 ; 78 (1 et 3) p214 - 72 à 74 p 213

III Équation du second degré à coefficients réels

Activité CPX01 extraite du manuel MathX (éditions Didier) : on y découvre la règle de Cardan (1501-1576) et l'audace de Bombelli (1526-1572).

a. Équation du type $z^2 = a$

Propriété : soit a un réel non nul.
L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:
si $a > 0$ alors les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
si $a < 0$ alors les solutions sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 = -4$
(E) admet deux solutions complexes : $2i$ et $-2i$

Ex 11 p211

b. Équation du type $az^2 + bz + c = 0$, a, b et c réels, $a \neq 0$

Propriété
Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des nombres réels, $a \neq 0$.
Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $z = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $4z^2 + 16z + 25 = 0$.

$\Delta = -144$; Δ est négatif donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

La formule ci-dessus donne $z_1 = \frac{-16 - i\sqrt{|-144|}}{8} = \frac{-16 - 12i}{8}$ et $z_2 = \frac{-16 + 12i}{8}$

Autre méthode : $\Delta = -144 = (12i)^2$, les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{-16 - 12i}{8}$ et $z_2 = \frac{-16 + 12i}{8}$.

Exercices : 78 à 89 page 214

Pour s'auto-évaluer (brouillon indispensable) : https://euler.ac-versailles.fr/baseeuler/lexique/notion.jsp?id=98

***Une lecture**, accessible en TS, pour en savoir plus sur la méthode de Cardan :*
Article de Daniel Perrin, professeur à l'université Paris-Sud-Orsay :https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Cardan10.pdf