Probabilités (IV) : Lois normales

I - Introduction

Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale de paramètre n et p devient fastidieux. Sous certaines conditions, on va trouver une approximation de la loi binomiale.

Contexte *: La loi normale est le modèle probabiliste le plus utilisé pour décrire des moments observés dans la réalité.On parle de* ***loi normale*** *lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante. Cette loi acquiert sa forme définitive avec* ***Gauss*** *(en 1809) et* ***Laplace*** *(en 1812). C'est pourquoi elle porte également les noms de :* ***loi de Laplace, loi de Gauss et loi de Laplace-Gauss.***

Exemple : *Ainsi la taille corporelle d'un animal dépend des facteurs environnementaux (disponibilité pour la nourriture, climat, prédation, etc.) et génétiques. Dans la mesure où ces facteurs sont indépendants et qu'aucun n'est prépondérant, on peut supposer que la taille corporelle suit une loi normale.*

Voir le diaporama de Brigitte Chaput sur le blog

II- Loi normale centrée réduite

a. Théorème de Moivre-Laplace (admis) : Soit $p \in]0;1[$ un réel fixé et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p*.

Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

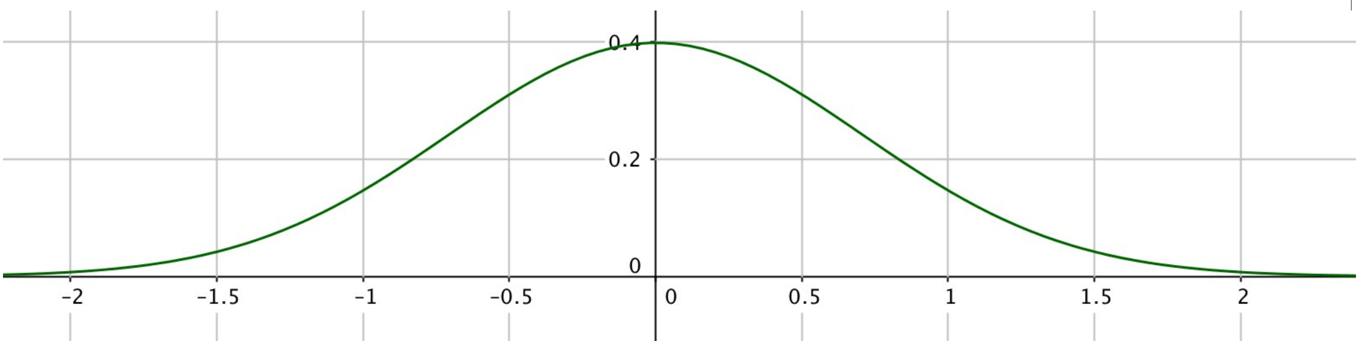
Alors pour tous réels *a* et *b*, $a<b$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$

Remarque : X_n a pour espérance np et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$

b) La loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

Définition **: La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$** est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Propriétés :
- *f* est continue sur $\mathbb{R}$.
- L'aire totale sous la courbe vaut 1. Elle représente $P(X \in \mathbb{R})$.
- La courbe C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le maximum de *f* est atteint pour $x=0$



La représentation graphique de cette fonction *f* est appelée courbe de Gauss ou gaussienne.
- L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est nulle.
- La variance (et donc l'écart-type) d'une variable aléatoire X suivant la loi N(0;1) vaut 1.

c) Calculer des probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0;1)$

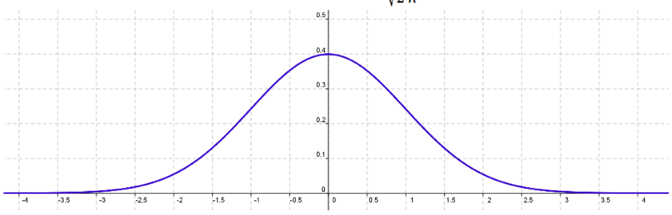
Problème : on ne connait pas de primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Seule la calculatrice (*Voir page 328*) permet d'effectuer les calculs ; mais, selon les modèles, elle ne sait calculer que des probabilités de la forme P(a<X<b)... d'où quelques **règles de calculs avec la loi $\mathcal{N}(0;1)$:**

Pour tous réels *a* et *b,* on a :	$(1)\ \mathbf{P(X\leqslant -a)=P(X\geqslant a)=1-P(X\leqslant a)}$
$(2)\ \mathbf{P(-a\leqslant X\leqslant a)=2\,P(X\leqslant a)-1}$	$(3)\ \mathbf{P(a<X<b)=P(X<b)-P(X<a)}$

Exercice 1 :

On donne la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$.



La variable aléatoire X suit la loi centrée réduite N(0;1).

1. Déterminer graphiquement les probabilités suivantes et en donner une valeur approchée :
   a. $p(X\in[-2;-1])$ en bleu ;
   b. $p(X\geqslant 1{,}5)$ en rouge ;
   c. $p(-0{,}5\leqslant X\leqslant 1)$ en vert ;

2. Lecture graphique
   a. Expliquer $p((X\geqslant 2)\cup(X\leqslant -2))\approx 0{,}05$
   b. Expliquer $p(X\geqslant 0)=0{,}5$
   c. Pour quelles valeurs de x_0, $p(-x_0\leqslant X\leqslant x_0)\approx 0{,}68$. En déduire $p(0\leqslant X\leqslant x_0)$.

Exercice n°2

X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice les probabilités à 10^{-3} près :

$P(-1\leqslant X\leqslant 1)$

$P(-2\leqslant X\leqslant 2)$

$P(X<1{,}5)$

$P(X>0{,}5)$

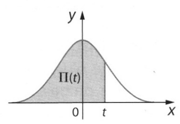
Exercice n°3
Sans la calculatrice...

Cette table permet d'obtenir une valeur approchée de $\boldsymbol{p(X\leqslant t)}$ avec $t\geqslant 0$.
Si on veut obtenir $P(X\leqslant 0{,}45)$, on lit la valeur située à l'intersection de la 5ème ligne (0,4) et de la 6ème colonne (0,05) : $P(X\leqslant 0{,}45)\approx 0{,}6736$.

À l'aide d'une table

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

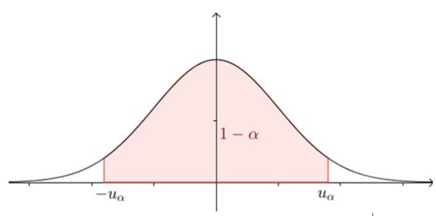
$\Pi(t)=P(T\leqslant t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 0	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2

À l'aide de la table, déterminer $P(X\leqslant 0{,}69)$; $P(X\geqslant 0{,}25)$; $P(0{,}16\leqslant X\leqslant 0{,}54)$.

e) Valeurs remarquables liées à $\mathcal{N}(0;1)$



Théorème (ROC)
Soit une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Alors pour tout α ∈]0 ; 1[, il existe un unique réel positif u_α
tel que $P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$.

Cas particuliers à connaître : $\boldsymbol{u_{0,05}\approx 1{,}96}$ **et** $\boldsymbol{u_{0,01}\approx 2{,}58}$ à 10^{-2} près.

Preuve du ROC : l'idée générale est d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'existence et l'unicité du réel u_α .

D'après la symétrie de la courbe C_f *, on a pour tout réel u positif :*

$P(-u\leqslant X\leqslant u)=2\times P(0\leqslant X\leqslant u)=2\times\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x=2F(u)$ *où F est la primitive de f qui s'annule en 0.*

On s'intéresse aux variations de la fonction 2F :

- *La fonction F est continue et strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *donc la fonction 2F également.*
- *L'aire totale sous la courbe est égale à 1 donc* $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ *donc* $\lim\limits_{u\to+\infty} 2F(u)=1$
- *Pour tout réel* α *de* $]0;1[$, *le réel* $1-\alpha$ *appartient aussi à* $]0;1[$ *donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel* u_α *positif tel que* $2F(u_\alpha)=1-\alpha$ *c'est-à-dire tel que* $P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$.

x	0	$+\infty$
variation de 2F	0 $\nearrow$	1

Autrement dit, on a $P(X\leqslant u_\alpha)=1-\frac{\alpha}{2}$

III La loi normale N(μ ; σ^2)

Elle permet de décrire des distributions évoquant une courbe en cloche pas forcément centrée en 0...

a. Définition : une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite N(0 ;1).
Z s'appelle la variable aléatoire centrée réduite de X.

Exercice : On peut modéliser la durée de vie (en heure) d'une ampoule par une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(5880;2700^2)$.

1. Quelle est la loi de la variable Z définie par $Z=\frac{X-5880}{2700}$?

2. Sachant que $P(Z\geqslant 1)=0,16$, déterminer la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait une durée de vie supérieure à 8580 heures.

b. Propriétés admises : une va X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, alors :
son espérance $E(X)=\mu$
sa variance est σ^2 et son écart type σ .

La courbe en cloche de la fonction de densité d'une loi normale a toujours une même forme « en cloche ». Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$ et d'autant plus resserrée autour de cet axe que σ est petit (σ détermine la hauteur de la cloche).

Cette fonction de densité a pour expression $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Les calculs se feront avec la calculatrice : voir page 332

c. Intervalles à « 1 ; 2 ou 3 σ »

Propriété : Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, on a les approximations suivantes :
$P(X\,a\,[\mu-\sigma;\mu+\sigma])=0{,}68$; $P(X\,a\,[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma])=0{,}95$; $P(X\,a\,[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma])=0{,}997$

Preuve : $P(X\,a\,[\mu-\sigma;\mu+\sigma])=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=P(-\sigma\leqslant X-\mu\leqslant\sigma)=P\left(-1\leqslant\frac{X-\mu}{-\sigma}\leqslant 1\right)$
$=P(-1\leqslant Z\leqslant 1)$ $\approx$ 0,68 où Z suit la loi N(0;1) donc $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0,68$

Loi $\mathcal{N}$(0,1) : Savoir Faire 8 et 9 page 331 ; Exercices 17 à 27 page 335 + 73 à 77 page 339
Loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$: Savoir-Faire 10 et 11 page 333 ; Exercices 28 à 36 page 335 + 86 à 92 page 340
Vidéo : Mathrix : https://youtu.be/prYlKm1XGjQ
Y. Monka : https://youtu.be/obbgLyTmgsY