Fonctions (II)	Dérivée d'une fonction composée

Compétences	*Exercices résolus*
Calculer la dérivée des fonctions du type $\sqrt{u}$ ou u^n	*Applications 1 et 2 ; 1 page 79*
Calculer la dérivée d'une fonction du type $v : x \to v(ax+b)$	*2 page 79*
Étudier une fonction de la forme $\sqrt{u}$	*3 page 79*

Exemples d'une composée de deux fonctions

La fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ est la composée de deux fonctions $u : x \to x^2+1$ et $v : \mathrm{X} \to \sqrt{\mathrm{X}}$

$x \to x^2+1$

$\mathrm{X} \to \sqrt{\mathrm{X}}$ On peut noter $f(x)=v[u(x)]=v \circ u(x)$

La fonction *g* définie par $f(x)=(3x+1)^5$ est la composée de deux fonctions $u : x \to 3x+5$ et $v : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^5$

$x \to 3x+5$

$\mathrm{X} \to \mathrm{X}^5$ On peut noter $g(x)=v[u(x)]=v \circ u(x)$

Pour en savoir plus sur la composition de fonctions, le cours de la *Khan academy* avec des exercices :
https://fr.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/funciton-composition/a/finding-and-evaluating-composite-functions

Vidéo (Mathrix) : https://www.youtube.com/watch?v=FwTawZ9W4nY

1. Les fonctions $\sqrt{u}$, composée de la fonction racine carrée et d'une fonction *u*

Théorème : *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout *x* de I, $u(x)>0$.
La fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Exemple 1 : Déterminer la dérivée d'une fonction du type $\sqrt{u}$

Déterminer l'ensemble de définition D_f puis la dérivée de la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

La fonction racine carrée est définie sur [0 ; + ∞[donc *f* est définie lorsque $4-x^2 \geqslant 0$.
$4-x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$ donc D_f = [-2 ; 2].

f est dérivable sur]-2 ; 2[et *f* est du type $f=\sqrt{u}$ où $u(x)=4-x^2$ et $u'(x)=-2x$

donc $\forall x \in]-2;2[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Exercices 1-2-3-4-15-16 page 84 ; 48-49-60 à 67 page 86 ; sujet A et C page 97 ; 141 page 99

2. Les fonctions u^n, $n \in \mathbb{Z}$, composée de la fonction puissance et d'une fonction *u*

Théorème : Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle I et *n* un entier relatif non nul.
Soit *f* la fonction définie par $f(x)=(u(x))^n$.

Si $n \geqslant 1$, *f* est dérivable sur I et $f'(x)=n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$;

Si $n \leqslant 1$ ET si *u* ne s'annule pas sur I, alors *f* est dérivable sur I et $f'(x)=n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$.

Exemple 2 : Déterminer la dérivée d'une fonction du type u^n

Déterminer les dérivées des fonctions définies par : $h(x)=(-4x^2+3)^4$ sur $\mathbb{R}$

et $k(x)=\dfrac{1}{(2x-6)^3}$, $x \neq 3$.

a) h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; on a $h(x)=u(x)^4$ avec $u(x)=-4x^2+3$

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=-8x$

h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=4\times u'(x)\times u(x)^3=4\times(-8x)\times(-4x^2+3)^3=-32x(-4x^2+3)^3$

b) On a $k(x)=\dfrac{1}{u(x)^3}=u(x)^{-3}$ avec $u(x)=2x-6$

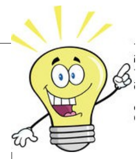
La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2$. La fonction u s'annule en 3.
On en déduit que k est dérivable sur $\mathbb{R}/\{3\}$ et

$k'(x)=-3\times u'(x)\times u(x)^{-4}=-3\times 2\times(2x-6)^{-4}=\dfrac{-6}{(2x-6)^4}$.

Exemples supplémentaires : vidéo (Y. Monka) : https://www.youtube.com/watch?v=kE32Ek8BXvs&feature=youtu.be

Exercices 5 à 10 page 84 ; 50 à 52 page 86 ; 132 page 92

3. Fonctions $x\rightarrow f(ax+b)$



Propriété admise :
Si $f(x)=u(ax+b)$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b sont deux réels, alors f est dérivable en tout réel x tel que $ax+b\in \mathrm{I}$ et $f'(x)=a\times u'(ax+b)$

Généralisation : si $f(x)=v[u(x)]$ où u et v sont deux fonctions dérivables, alors $f'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]$.

Exemple 3 : Déterminer la dérivée d'une fonction composée

1. $f(x)=v(3x+2)$ où v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$.

$f(x)=v[u(x)]$ avec $u(x)=3x+2$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=3$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3\times v'(3x+2)$.

2. $f(x)=v(3x^2-2x+1)$ où v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer $f'(x)$.

$f(x)=v[u(x)]$ avec $u(x)=3x^2-2x+1$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=6x-2$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(6x-2)\times v'(3x^2-2x+1)$.

Exemple 4 : Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $v'(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$

On pose $f(x)=v(-x)$; $g(x)=v(3x+5)$ et $h(x)=v(x^2)$; déterminer $f'(x)$; $g'(x)$ et $h'(x)$.

1. $f(x)=v[ax+b]$ avec $ax+b=-x$ donc $f'(x)=-v'(-x)=-\left[\dfrac{1}{2(-x)^2+1}\right]=\dfrac{-1}{2x^2+1}$

2. $g(x)=v(3x+5)$ donc $g'(x)=3\times v'(3x+5)=\ldots=\dfrac{1}{2(3x+5)^2+1}$

3. $f(x)=v[u(x)]$ avec $u(x)=x^2$ donc $f'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]=2x\times v'(x^2)=2x\times\dfrac{1}{2\times(2x)^2+1}=\dfrac{2x}{8x^2+1}$

exercices 11 à 14 page 84 et 53 à 59 page 86

Autres exemples : vidéo (Mathrix) : https://www.youtube.com/watch?v=8L6zqAgZsvo

Désormais vous pouvez dériver une composée de deux fonctions ; nous réinvestirons ceci avec l'étude des fonctions trigonométriques, logarithme et exponentielle.