SUITES NUMÉRIQUES (III)
Suites géométriques

1. Prérequis

Dans le cas d'une suite **géométrique,** on passe d'un terme au suivant en multipliant (divisant) toujours le même nombre non nul.

Définition : Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q non nul tel que, pour tout entier n, on ait $u_{n+1}=q\times u_n$.
Le réel q est appelé raison de la suite.

Théorème : si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q, alors $u_n=u_0\times q^n$.
Si le 1er terme est u_1 , alors $u_n=u_1\times q^{n-1}$.
Plus généralement, pour tous entiers n et p, $u_n=u_p\times q^{n-p}$

Rappel : pour tout réel $a\neq 0$, $a^0=1$.

2. Somme de termes

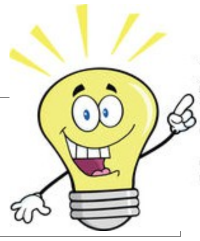
a. Somme des premières puissances d'un nombre

Théorème : si n est un entier naturel et q un réel différent de 1, alors
la somme des $(n+1)$ premières puissances de q est $S=1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : calculer la somme des 10 premières puissances de 2.

$$S=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^9 \qquad \text{ici } q=2 \text{ et } S=\frac{1-2^{10}}{1-2}=\frac{1-1024}{-1}=1023$$

b. Somme des premiers termes d'une suite géométrique



Théorème : si (u_n) est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison $q\neq 1$, alors
la somme des $(n+1)$ premiers termes de u_n est $S=u_0+u_1+\ldots u_n=u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0=5$ et de raison $q=2$. Calculer la somme des 10 premiers termes.

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_9 \qquad \text{ici } q=2 \text{ et } S=u_0\times\frac{1-2^{10}}{1-2}=5\times\frac{1-1024}{-1}=5\times 1023=5115$$

SF4 page 17 Exercices 50 à 53 page 28

Une nouvelle notation : on note $\sum_{i=0}^{9} q^i$ la somme des 10 premières puissances de q.

On note $\sum_{i=0}^{9} u_i$ la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n)

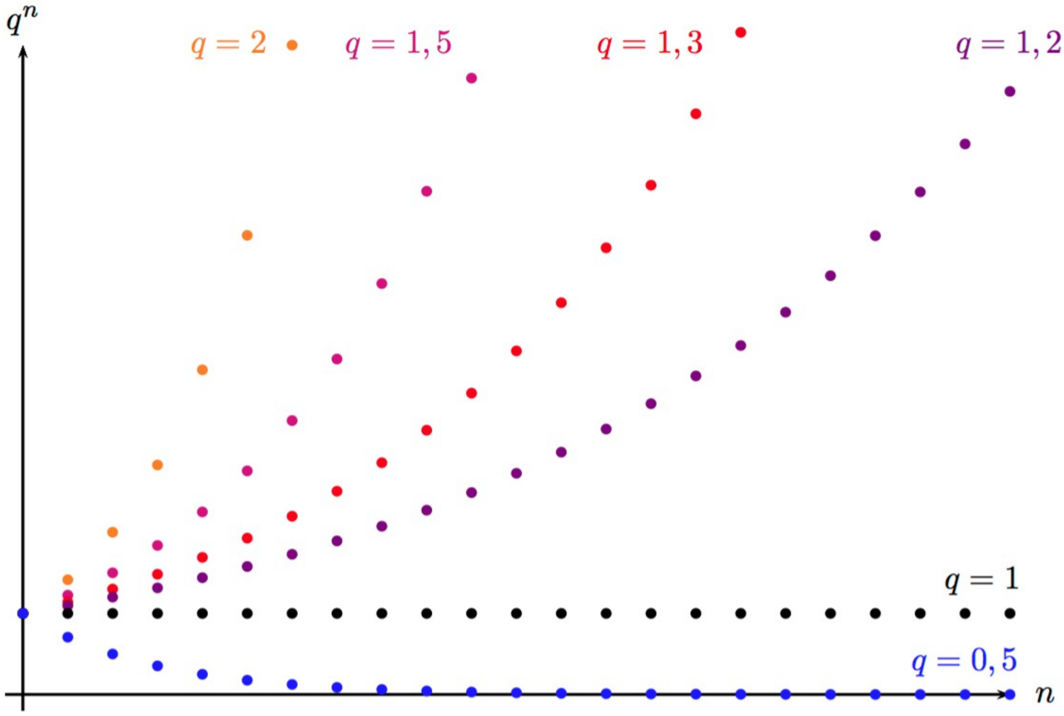
Exemple : $$\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$$

3. Limite d'une suite géométrique

Théorème : soit q un réel

Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$

Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$



Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n=0$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} 5^n=+\infty$

On sait que pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n$; on en déduit donc :

Théorème : soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison $q\neq 1$, alors

Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Si $q=1$, alors la suite (u_n) est une suite constante égale à u_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0$

Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ si $u_0>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ si $u_0<0$.

Exemples :

(u_n) est la suite géométrique de raison 4 et de 1er terme $u_0=-2$; On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

(u_n) est la suite géométrique de raison 4 et de 1er terme $u_0=5$; On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

(u_n) est la suite géométrique de raison 1/2 et de 1er terme $u_0=-2$; On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

(u_n) est la suite géométrique de raison 1/2 et de 1er terme $u_0=3$; On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Exercices 43 à 49 page 27