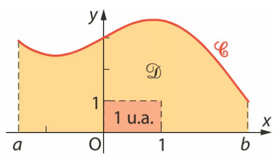
Calcul Intégral (I)
Notion d'aire sous la courbe

Compétences	
Calculer une intégrale à partir d'une aire	*1 page 167*
Encadrer l'aire « sous la courbe », méthode des rectangles	*2 page 167*

I Intégrale d'une fonction positive

Définition

1. Dans un repère orthogonal (O ; I ; J), on appelle **unité d'aire (u.a.)** l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].



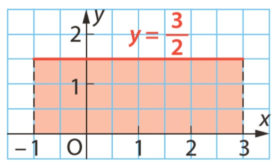
2. Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; b] et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On appelle **intégrale de *f* entre *a* et *b***, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Cette aire est appelée « **l'aire sous la courbe de *f*** », elle se note : $\int_a^b f(x)\,dx$.

a est la **borne inférieure** de cette intégrale et *b* est la **borne supérieure**.

Exemples

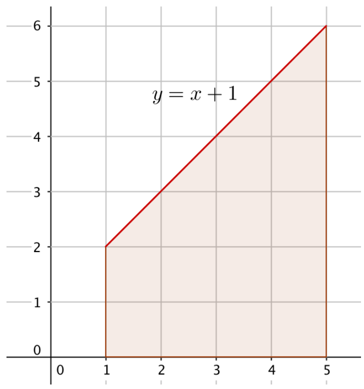
a) La fonction définie sur [-1 ; 3] par $f(x)=\dfrac{3}{2}$ est continue et positive.



$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=3$.

Ici c'est donc l'aire du rectangle rose. On a donc $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4\times 1{,}5=6$ u.a

b) La fonction définie sur [1 ; 5] par $f(x)=x+1$ est continue et positive.



$\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=5$.
Ici c'est donc l'aire du trapèze rose.

On a donc $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = \dfrac{2+6}{2}\times 4=16$ u.a.

Utilisation de la calculatrice

Attention, la fonction doit être positive sur l'intervalle [*a ; b*].

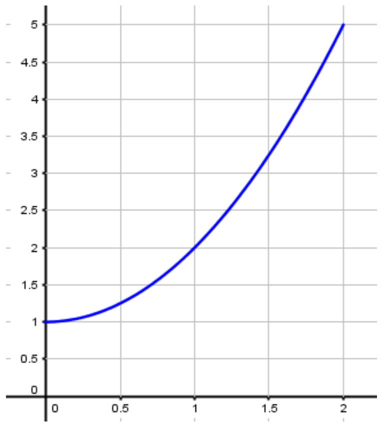
Un lien vers Maxicours : http://www.maxicours.com/se/fiche/0/9/420309.html

Manuel page 167

Exercices 1 ; 2 ; 3 page 176 ;
Exercice 4 page 176
Exercices 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 42 et 43 page 178

II Encadrement de l'intégrale d'une fonction positive

1. Méthode des rectangles



Exemple : Soit *f* la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x^2+1$
et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J).
Cette fonction est positive et monotone sur $[0;2]$.

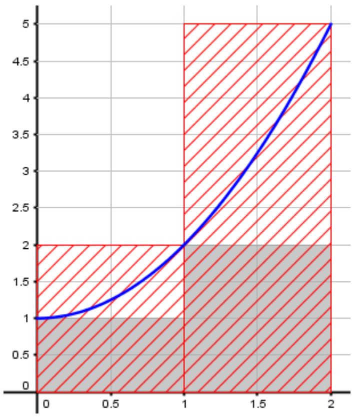
Donner un encadrement de l'aire sous la courbe de *f* :

$$\ldots\ldots \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ldots\ldots\ldots$$

Objectif : obtenir un encadrement plus précis de l'aire.

- On divise l'intervalle $[0;2]$ en *n* sous intervalles de même amplitude *h* où $h=\frac{2}{n}$.
- Sur chacun de ces intervalles d'amplitude *h*, on construit deux séries de rectangles (les gris et les hachurés) qui encadrent l'intégrale.
- On note S_1 l'aire des rectangles gris et S_2 l'aire des rectangles hachurés.

cas $n=2$



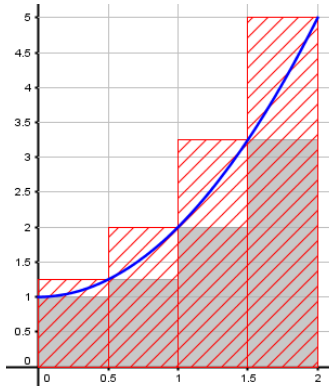
$h=$

$S_1=$

$S_2=$

$$\ldots\ldots \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ldots\ldots\ldots$$

cas $n=4$



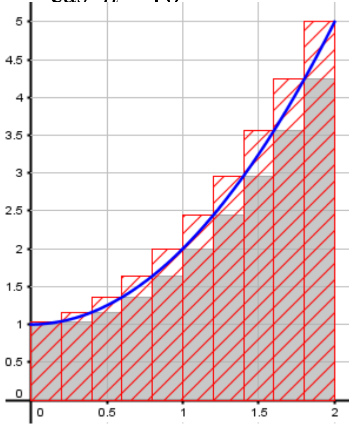
$h=$

$S_1=$

$S_2=$

$$\ldots\ldots \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ldots\ldots\ldots$$

cas $n=10$



$h=$

$S_1=$

$S_2=$

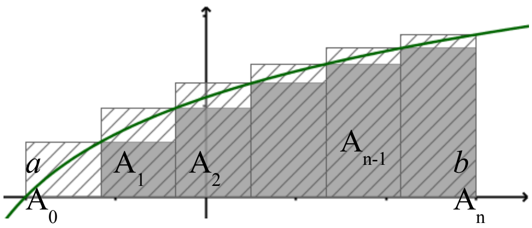
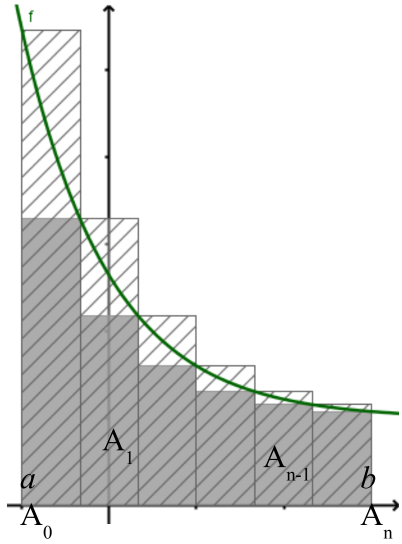
$$\ldots\ldots \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ldots.$$

Remarque : Plus *n* est grand, moins l'écart entre S_1 et S_2 est important.

Pour $n=100$, *GeoGebra* donne $S_1=4{,}63$ et $S_2=4{,}71$.

On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} S_2 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Généralisation et Algorithme

Cas : *f* est croissante sur [*a* ; *b*]	**Cas : *f* est décroissante sur [*a* ; *b*]**
 - On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h=\dfrac{b-a}{n}$. - Sur chacun de ses intervalles $[\mathrm{A}_k;\mathrm{A}_{k+1}]$, « l'aire sous la courbe de *f* » est comprise entre les aires des deux rectangles, l'un de hauteur $f(\mathrm{A}_k)$ et l'autre de hauteur $f(\mathrm{A}_{k+1})$. - Ces rectangles ont donc pour aire : $h\times f(\mathrm{A}_k)$ et $h\times f(\mathrm{A}_{k+1})$.	

On a alors :

Si *f* est croissante alors …................................... $\leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant$ …..

…..................................... $\leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant$ …..

Si *f* est décroissante alors ….................................. $\leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant$ …..................................

Pour déterminer cet encadrement, on peut utiliser un algorithme :

Initialisation	$h \leftarrow \dfrac{b-a}{n}$ $u \leftarrow 0$ $v \leftarrow 0$
Traitement	Pour k allant de 0 à $n-1$ $u \leftarrow u+h\times f(a+k\times h)$ $v \leftarrow u+h\times f(a+(k+1)\times h)$ Fin Pour
Sortie	Afficher u Afficher v

Exercice 1 : On reprend la fonction *f* définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x^2+1$.
Programmer l'algorithme précédent et donner les valeurs obtenues pour $n=10$ puis pour $n=200$.

Exercice 2 : On considère la fonction *g* définie sur [-2 ; 3] par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
À l'aide de l'algorithme, donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n=50$.