DÉRIVATION
Compléments

1. Dériver les fonctions $x \to (u(x))^n$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier relatif non nul.

Théorème :

• La fonction f définie sur I par $f(x)=[u(x)]^n$ est dérivable sur I.

• Si $n>0$, alors $f'(x)=n\times(u(x))^{n-1}\times u'(x)$

• Si $n>0$ et $u(x)\neq 0$ pour tout réel x de I, alors $f'(x)=n\times(u(x))^{n-1}\times u'(x)$

Exemples :

• Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+5)^4$.

$f(x)=(u(x))^4$ avec $u(x)=2x+5$ $\qquad$ $u'(x)=2$ et $f'(x)=4\times(2x+5)^3\times 2=8(2x+5)^3$

• Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(\cos x)^3$.

$f(x)=(u(x))^3$ avec $u(x)=\cos(x)$

$u'(x)=-\sin(x)$ et $f'(x)=3\times(\cos(x))^2\times(-\sin(x))=-3\sin(x)\times(\cos(x))^2$

• Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

Méthode : on pense à utiliser la relation $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$

$f(x)=(x^2+1)^{-3}$ donc $f(x)=(u(x))^n$ avec $u(x)=x^2+1$ jamais nul et $n=-3$

$u'(x)=2x$ et $f'(x)=(-3)\times(x^2+1)^{-3-1}\times(2x)=-6x(x^2+1)^{-4}=\dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$.

Savoir faire 1 page 77 - Exercices 1 à 18 page 89

2. Dériver les fonctions $x \to \ln(u(x))$ et $x \to e^{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriétés

• La fonction f définie sur I par $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

• La fonction f définie sur I par $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

Exemples

Dériver la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\ln(2x-4)$

$f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=2x-4$ $\qquad$ $u'(x)=2$ et $f'(x)=\dfrac{2}{2x-4}$

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2-5}$

$f(x)=e^{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-5$ $\qquad$ $u'(x)=2x$ et $f'(x)=2x\times e^{x^2-5}$

Exercices 41 à 44 page 120 et 22 à 27 page 147