Fonctions (I)	Continuité, Théorème des valeurs intermédiaires, Algorithme de dichotomie

Compétences	*Exercices corrigés*
Notion de la continuité d'une fonction	*Application 1 ; 9 p 51*
Savoir exploiter le théorème des valeurs intermédiaires ou son corollaire pour résoudre un problème donné.	*Applications 2 et 3* *10 p 53 ; 107 p 61*
Savoir encadrer la solution d'une équation (algorithme / balayage)	*11 p 53 ; 107 p 61*

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

I. Le principe de continuité

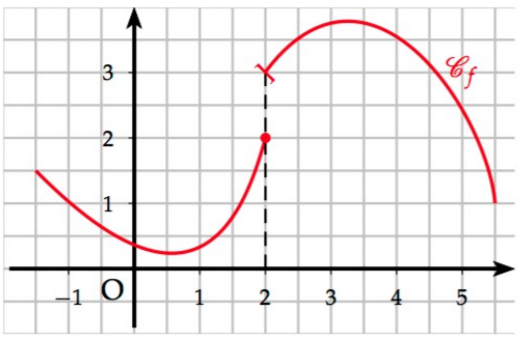
Une première vidéo (Mathrix) : https://www.youtube.com/watch?v=payz-3zEzLI

Activité : fonction partie entière $x \to \mathrm{E}(x)$

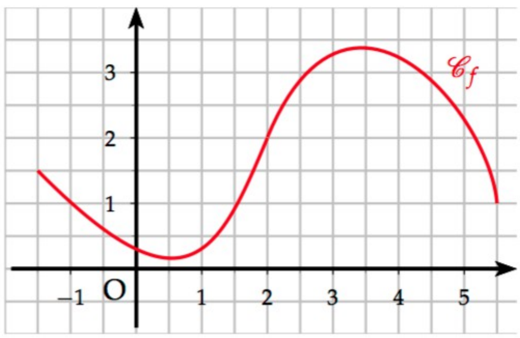
Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel *a*.

- *f* est est continue en *a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- *f* est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Remarque : Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.



Fonction f discontinue en 2
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



Fonction f continue sur $[-1,5\,;\,5,5]$

https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/04_continuite_derivabilite_fonction/04_Cours_continuite_derivabilite_fonction.pdf

Continuité et fonctions usuelles :

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition ;
La fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$;
La fonction $x \to x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction inverse $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Théorème admis : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a.

C'est le cas par exemple, de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.
Elle est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Rappel : Pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un point *a*, il faut utiliser le taux d'accroissement...

Exemple (1S) : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ est dérivable en $a = 1$.

Méthode : **a)** on calcule le taux d'accroissement en 1 : $\mathrm{T}(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \ldots = 3h + 4$

b) On passe à la limite : $\lim\limits_{h \to 0} \mathrm{T}(h) = 4$; La limite existe, on en déduit que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$: c'est la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers 0.

Exercice : Soit f la fonction définie sur ℝ par $\begin{cases} x^2 \; si \; x < 1 \\ -3x + 4 \; si \; x \geqslant 1 \end{cases}$

1. Tracer la courbe de f dans un repère.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ? **3.** La fonction f est elle dérivable en 1 ?

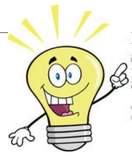
Exercices 31 page 55 et 144-145 page 71

Un autre exemple en vidéo (Maths-et-tiques) : - https://www.youtube.com/watch?v=03WMLyc7rLE

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :
Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle [a ; b], alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

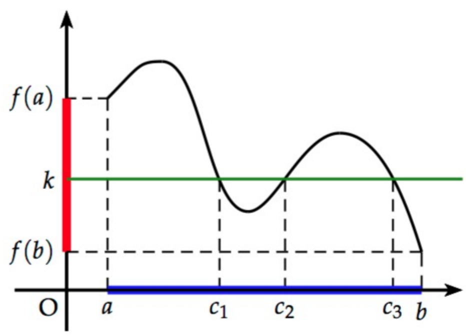


Remarque : Ce théorème est admis.

Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$

Voici une illustration graphique. Ici k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$. L'équation $f(x) = k$ admet donc des solutions.

Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il soit unique. Dans notre exemple, il existe ainsi trois valeurs pour c.



https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/mathTermS/04_continuite_derivabilite_fonction/04_Cours_continuite_derivabilite_fonction.pdf

Application 1 : Montrer qu'une équation admet au moins une solution

Montrer que l'équation $2x^3+3x^2-2x=2$ admet *au moins* une solution sur [-2 ; 1].

Résolution : On va utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

La fonction polynôme f définie sur [-2 ; 1] par $f(x)=2x^3+3x^2-2x$ est dérivable sur [-2 ; 1] donc continue sur [-2 ; 1]. On veut savoir si l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution dans [-2 ; 1].

$f(-2)=0$ et $f(1)=3$; $k=2$ est compris entre $f(-2)$ et $f(1)$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet *au moins* une équation sur [-2 ; 1].

Deux exemples en vidéos : Mathrix (TVI) : https://www.youtube.com/watch?v=Pk8CnjmGqGw
Maths-et-tiques (TVI) : https://www.youtube.com/watch?v=fkd7c3IAc3Y&feature=youtu.be

Théorème : Corollaire du TVI
Si une fonction *f* est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*] alors pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'équation $f(x)=k$ a une et une seule solution dans l'intervalle [*a* ; *b*].

Preuve dans le cas où f est une fonction strictement croissante sur [a ; b].

Soit le réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

f est continue sur [a ; b] donc d'après le T.V.I, il existe au moins un réel c de [a ; b] tel que $f(c)=k$.

f est strictement croissante sur [a ; b] donc pour tout réel de [a ; c[, $f(x)<f(c)$ donc $f(x)<k$

et pour tout réel de]c ; b[, $f(x)>f(c)$ donc $f(x)>k$

x	a	c	b
Variation de f	$f(a)$	k	$f(b)$

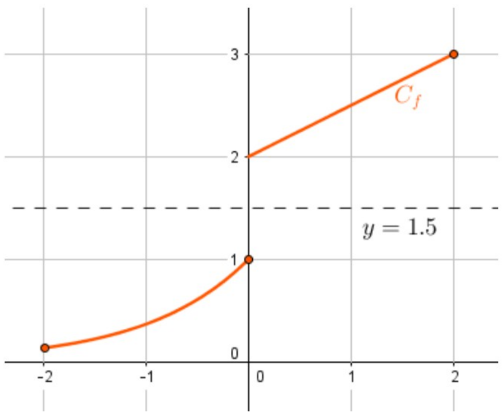
Conclusion : l'équation $f(x)=k$ n'admet qu'une solution dans [a ; b], c'est le réel c.

À vous de refaire le raisonnement si f est strictement décroissante sur [a ; b].

Importance des hypothèses dans l'application du corollaire du TVI :

➔ **L'existence des solutions est assurée par la continuité.**

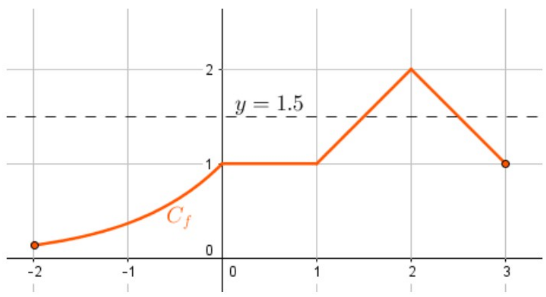
Si la fonction n'est pas continue, l'existence n'est pas nécessairement assurée comme le montre la figure ci-dessous :



On remarque graphiquement que l'équation $f(x)=1{,}5$ n'admet pas de solution sur [-2;2].

➔ **L'unicité des solutions est assurée par la stricte monotonie et la continuité :**

Si la fonction n'est pas strictement monotone, on peut avoir plusieurs solutions :



Sur [-2 ; 3] , la fonction f n'est pas monotone, on a alors deux solutions à l'équation $f(x)=1{,}5$.

Sur [-2 ; 1] , la fonction f n'est pas strictement croissante et l'équation $f(x)=1$ admet une infinité de solution.

Application 2 : Montrer qu'une équation admet une unique solution et encadrer cette solution.

Montrer que l'équation $x^3+x-1=0$ admet une unique solution sur [0 ; 1].

Solution : On va utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

- ☛ La fonction *f* définie sur [0 ; 1] par $f(x)=x^3+x-1$ est continue et dérivable sur [0 ; 1].
- ☛ $\sum x\in[0;1]$, $f'(x)=3x^2+1>0$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur [0 ;1]
- ☛ $k=0$ et $0\in[-1;1]$ k est bien compris entre $f(0)$ et $f(1)$.

x	0	x_0	1
f(x)	-1	0	1

Bilan : d'après le corollaire du TVI, il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0)=0$.

Par *balayage*, on obtient que 0,682 < x_0 < 0,683

Exercices 32 et 33 page 55 puis 104 à 108 page 61

III. Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dichotomie : du grec *dikhotomia* : *action de partager en deux.*

La **méthode de dichotomie** est une méthode pour trouver une solution *approchée* d'une équation, ici $f(x)=0$.
Supposons que la fonction *f* est continue sur l'intervalle [*a*,*b*], avec $f(a)<0$ et $f(b)>0$.
On sait donc qu'il existe au moins un réel *c* dans l'intervalle [*a* ; *b*] tel que $f(c)=0$.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut *f* au milieu de [*a* ;*b*], et de distinguer les deux cas suivants :

si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le 0$ alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$

sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne.

Comment savoir si la racine α est bien dans l'intervalle]a ; b[?

Si… $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, ce qui équivaut à $f(a)\times f(b)<0$.

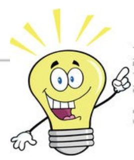
Si $f(a)\times f(c)\le 0$ alors rechercher α sur]a;c]

Sinon rechercher α sur]c;b[

Dans la pratique on prendra pour c le milieu de l'intervalle [a ; b].

On itérera le processus jusqu'à obtenir la précision souhaitée P.

Programmer l'algorithme de dichotomie sur la calculatrice



On peut faire appel à une fonction à l'intérieur d'un programme.

__1ère étape__ : Entrer la fonction dont on aura besoin dans la variable ***Y1***

Pour la Ti : en utilisant la touche $f(x)$
Pour la CASIO : en entrant dans le menu **GRAPH**

Avec la TI	Avec la CASIO
 Prompt A Prompt B Prompt P While $B-A>P$ $(A+B)/2\to M$ If $Y1(A)\times Y1(M)<0$ *« Pour obtenir la variable Y1 :* *- Appuyer sur la touche* $\boxed{var}$ *- Mettre en surbrillance le menu* $\boxed{\text{VAR-Y=}}$ *- Sélectionner la variable* $\boxed{Y1}$ *»* Then $M\to B$ Else $M\to A$ End End Disp $(A+B)/2$	 « A » : ? → A « B » : ? → B « P » : ? → P While $B-A>P$ $(A+B)/2\to M$ $A\to X$ *« Attention, X est la variable obtenue en utilisant la touche* $\boxed{X,\theta,T}$ *»* $Y1\to C$ *« Pour obtenir la variable Y1 :* *- Appuyer sur la touche* $\boxed{VARS}$ *- Entrer dans le menu* $\boxed{GRPH}$ *- Sélectionner la variable* $\boxed{Y}$ *puis taper* $\boxed{1}$ *»* $M\to X$ $Y1\to D$ if $C\times D<0$ Then $M\to B$ Else $M\to A$ IfEnd WhileEnd $(A+B)/2$ ◢