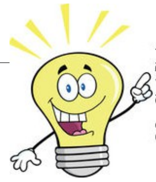
Limites de fonctions (I)

I - Le paradoxe d'Achille et la tortue   Site de Gérard Villemain

Le philosophe grec Zénon d'Élée (≈ -450) est connu pour ses paradoxes, notamment celui d'Achille et de la tortue : « Achille, situé en O, poursuit une tortue qui se trouve en A. Le temps qu'il arrive en A, la tortue sera en B. Achille devra donc ensuite aller en B. Mais alors la tortue sera en C, et ainsi de suite. Achille pourra se rapprocher sans cesse de la tortue, mais il ne pourra jamais la rattraper. ».

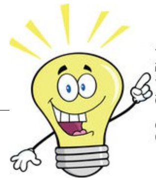
II - Asymptotes et limites

1. Limite infinie d'une fonction en un point, asymptote verticale



Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a;b]$ ou $[b;a[$ où *a* et *b* sont des réels. Lorsque le réel *x* s'approche de *a*, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus...
- grands, on dit que *f* a pour limite $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$
- grands en valeur absolue, mais négatifs, on dit que *f* a pour limite $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Remarque : on peut préciser si on s'approche de *a*
- par valeurs inférieures : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\pm\infty$
- par valeurs supérieures : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\pm\infty$



Définition : dans le cas où la limite en a vaut ±∞, on dit que la droite d'équation $x=a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative C_f .

Exemple : la fonction *f* de l'activité définie pour tout $x\neq 2$ par $f(x)=\dfrac{20-5x}{2-x}$

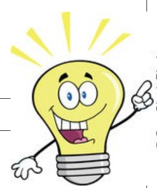
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est une ***asymptote verticale*** à C_f .

Savoir Faire 2 page 43 ; exercices 9 à 14 page 60

2. Limite finie d'une fonction au voisinage de l'infini, asymptote horizontale

Définition : *a* est un nombre réel. Soit *f* une fonction définie sur au moins]*a* ; +∞[(respectivement]-∞, *a* [). Lorsque le réel *x* prend des valeurs de plus en plus grandes vers +∞, (respectivement vers -∞), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus proches d'un réel L, on dit que $f(x)$ a pour **limite** L en +∞ (respectivement vers -∞).

On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mathrm{L}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\mathrm{L}$



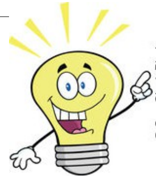
Définition : dans le cas où la limite en ±∞ vaut un réel L, on dit que la droite d'équation $y=\mathrm{L}$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative C_f .

Exemple : la fonction *f* de l'activité définie pour tout $x\neq 2$ par $f(x)=\dfrac{20-5x}{2-x}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$ donc la droite d'équation $y=5$ est une *asymptote verticale* à C_f .

Savoir Faire 1 page 41 ; exercices 1 à 6 page 59

3. Limite infinie d'une fonction au voisinage de l'infini

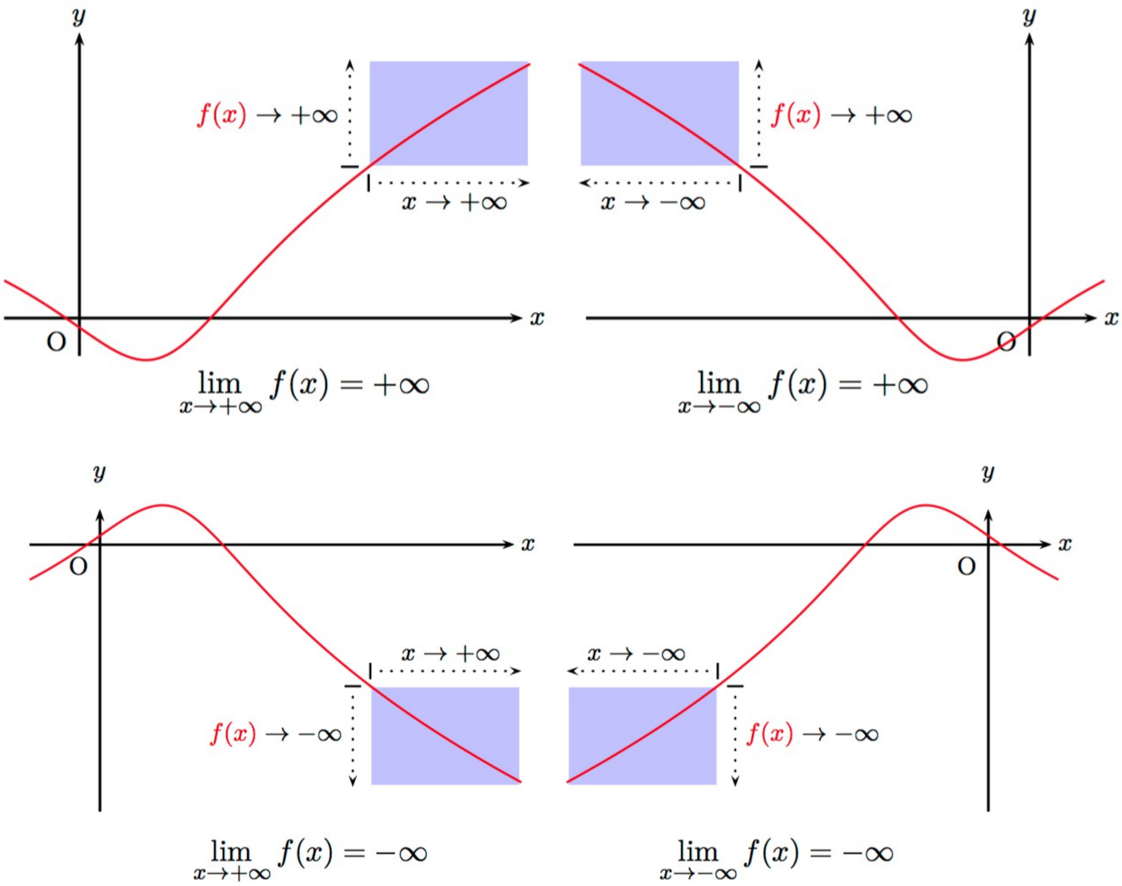


Définition : Soit f une fonction définie au moins sur $]a\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a[$).

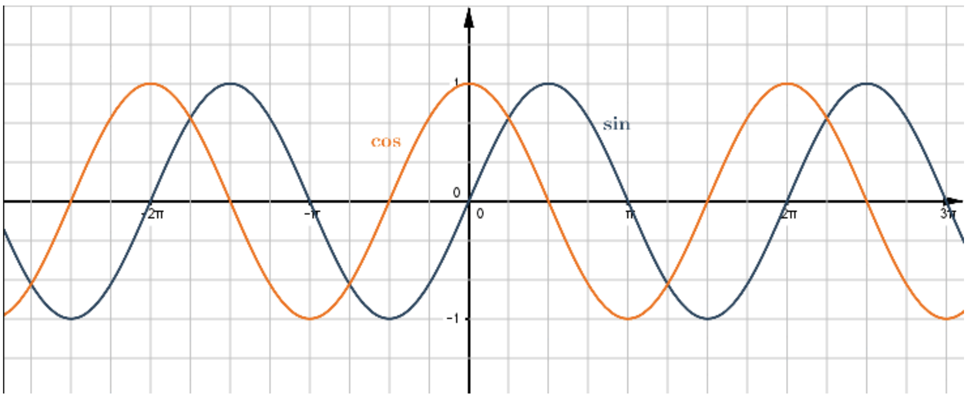
Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- grands, on dit que f a pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).
- grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour **limite** $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).

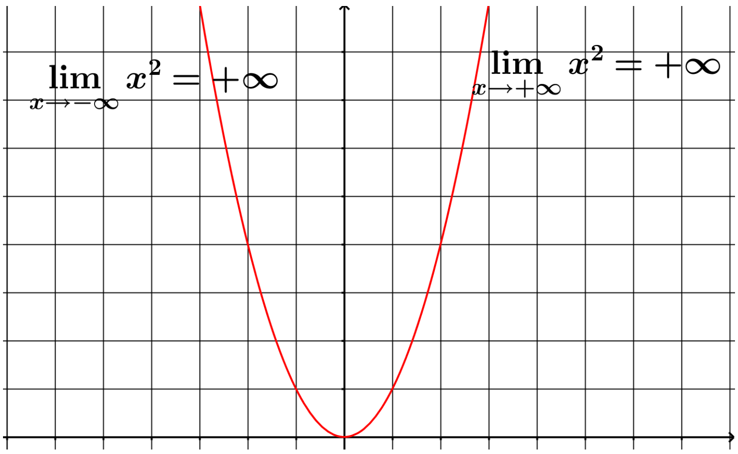
Illustrations (extraites du site de N. Duval)



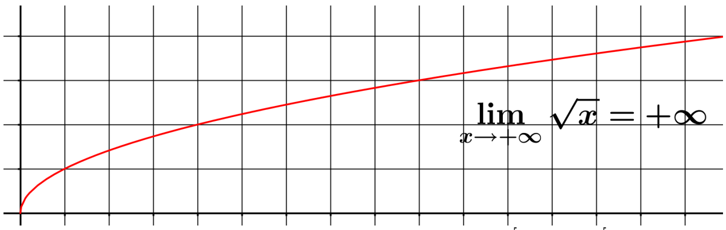
Remarque : certaines fonctions n'ont pas de limite au voisinage de l'infini comme par exemple les fonctions sinus et cosinus.



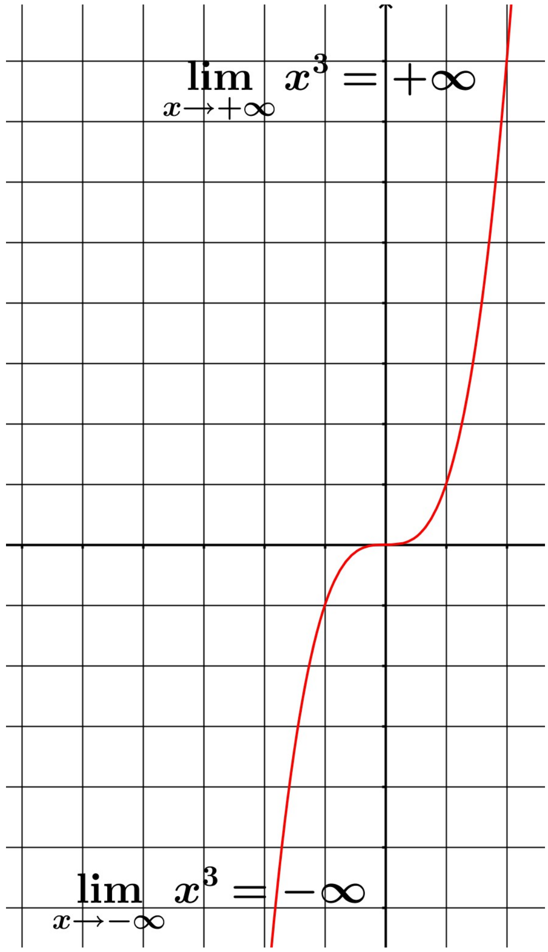
III - Limite des fonctions usuelles



La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$

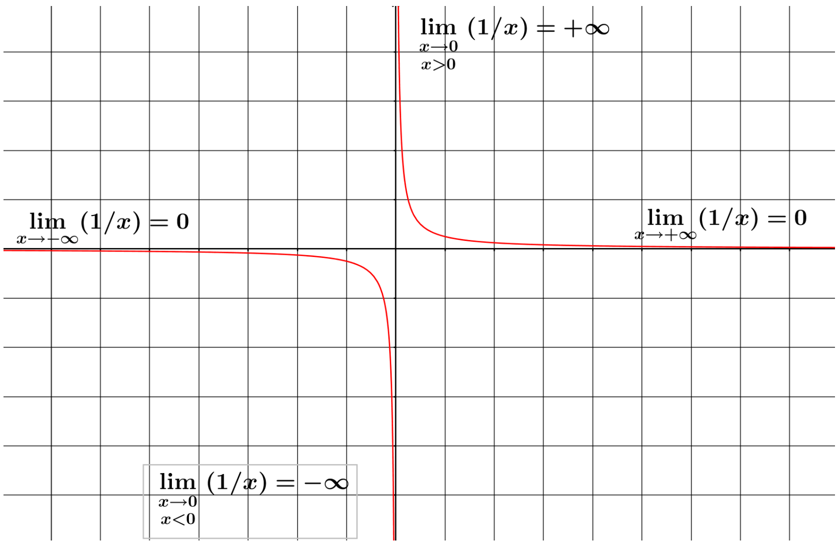


La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;+\infty[$



La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$

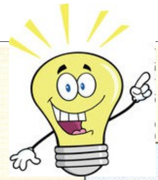
La fonction inverse est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$



L'axe des abscisses est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote à C_f

IV - Opérations sur les limites



Limite de $f+g$

lim g \ lim f	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Limite de $\frac{1}{f}$

lim f	$\ell\ (\ell\neq 0)$	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
lim $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	0^-	0^+	$-\infty$	$+\infty$

Limite de $f\times g$

lim g \ lim f	$\ell>0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Exemples : cas simples, les théorèmes s'appliquent.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-3=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2-3=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2-3=-\infty$

Savoir -faire 4 page 47 ; ex 27 et 28 page 63

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^2-3}=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{5x^2-3}=0$

Savoir -faire 6 page 51 ; ex 38 à 47 page 63/64

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times\sqrt{x}=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\times\sqrt{x}=+\infty$

ex 29 ; 30 ; 33a/c

Exemples : cas plus complexes quand les théorèmes ne permettent pas de conclure.

F.I. signifie « forme indéterminée », dans ce cas, il faudra « lever l'indétermination ».

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-x-3=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$; on a donc une F.I.

Méthode : on factorise par le terme de plus haut degré : $5x^2-x-3=x^2\left(5-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=5$

donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2-x-3=+\infty$

Méthodes : 2 / 3 page 54 et 2 / 3 page 55 ; ex 53 à 55 page 65

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+3}{x^3-4}=?$ On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x^2+3)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-4=+\infty$; on a donc une F.I.

$$\frac{5x^2+3}{x^3-4}=\frac{x^2\left(5+\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\times\frac{\left(5+\frac{3}{x^2}\right)}{1-\frac{4}{x^3}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5+\frac{3}{x^2}=5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{4}{x^3}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^3}}=5$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+3}{x^3-4}=0$