Raisonner par récurrence

Compétences	*Exercices corrigés*
Savoir mener un raisonnement par récurrence	*Savoir faire 1 page 13 ; 52 p 24 ; 93 p 28* *Applications 1 et 2*

Introduction : tour de Hanoï
Notion de récursivité
Article de J.P. Delahaye paru dans Pour la Science en 2015 « Les tours de Hanoï, plus qu'un jeu d'enfants »
https://www.lri.fr/~hivert/COURS/Methodo/Textes/Hanoi.pdf

1. Raisonnement par récurrence

Les raisonnements en mathématiques se font en général par une suite de déductions, du style *si … alors*, ou mieux encore si c'est possible, par une suite d'équivalences, du style *si et seulement si*.
Mais il existe un autre type de raisonnement, que l'on appelle le r*aisonnement par récurrence*, particulièrement adapté lorsqu'il est demandé de prouver une formule dépendant d'un paramètre *n* entier.

Le raisonnement par récurrence fonctionne comme l'évolution d'une épidémie.

Prenons l'exemple d'une rangée d'individus, alignés du premier individu au dernier, celui-ci pouvant être infiniment loin, et mettons-les dans un contexte d'épidémie : si l'un est malade il transmet la maladie à son voisin de droite. Vont-ils tous être malades pour autant ?

Non : le 15ème individu peut être malade et contaminer les suivants sans que les 14 premiers le soient.

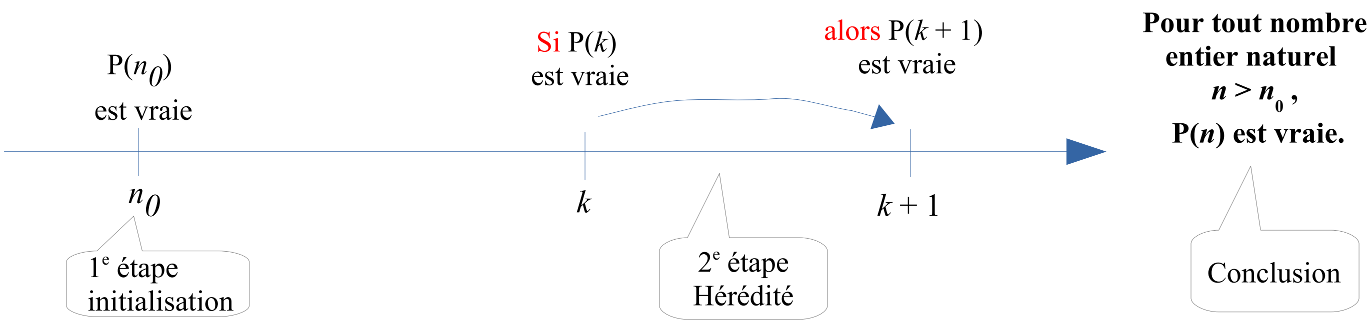
Mais si le premier individu est malade, alors oui, la maladie va se répandre à tous les individus, par transmission au voisin de droite (effet domino).

Voilà le raisonnement par récurrence, avec ses deux **contraintes** :
fonctionner au départ, et se transmettre de proche en proche.

Principe de récurrence : si une propriété P(n) est vraie pour l'entier n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier k supérieur ou égal à n_0, elle reste vraie pour l'entier k+1, alors cette propriété est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.

Méthode pour démontrer qu'une propriété est vraie par récurrence
On a deux étapes :
- *l'initialisation de la récurrence :* on vérifie que la propriété $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- *l'hérédité :* on suppose qu'il existe un entier $k > n_0$ pour lequel la propriété est vraie.
On démontre alors que la propriété reste vraie à l'étape $k+1$.

Autrement dit, on montre l'*implication* : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « P(k) est vraie $\Rightarrow$ $P(k+1)$ est vraie ».



Ex 1 à 7 page 22 ; 42 à 52 page 24

Application 1 : **Démontrer une égalité/inégalité à l'aide d'un raisonnement par récurrence**

Exemple : Prouver que pour tout entier strictement positif *n*, $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ou montrer que $\forall\, n\geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

On note $\mathrm{P}(n)$ l'égalité $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : on montre que l'égalité est vraie au rang $n_0=1$

$1\times\dfrac{1+1}{2}=1$ et $\displaystyle\sum_{1}^{1} k=1$ donc l'égalité est vraie au rang initial $n_0=1$

Hérédité : On montre que si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ reste vraie.

L'hypothèse de récurrence : $1+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

Nous devons montrer que $1+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$1+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\ldots=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : nous pouvons alors affirmer que la propriété est vraie pour tout rang *n*. En effet on a vu qu'elle est vraie au rang initial (initialisation). Et comme elle est vraie au rang 1, elle est vraie au rang 2 ; comme elle est vraie au rang 2, elle est vraie au rang 3 (hérédité), etc. Par récurrence, la formule est vraie pour tout *n*.

Applications aux suites numériques : l'*étude des suites définies par récurrence n'est pas toujours facile. Le raisonnement par récurrence permet de justifier la variation d'une suite (conjecturée préalablement à la calculatrice) ou de déterminer l'expression explicite d'une suite.*

Application 2 : Déterminer la forme explicite d'une suite

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+1$.

Montrer par récurrence que ∑ *n* a $\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}$.

On note $\mathrm{P}(n)$ l'égalité $u_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}$

Initialisation : on montre que l'égalité est vraie au rang $n_0=0$

$u_0=2$ et $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2$ donc l'égalité est vraie au rang initial $n_0=0$

Hérédité : On montre que si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ reste vraie.

L'hypothèse de récurrence : $u_k=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{3}{2}$;

Nous devons montrer que . $u_{k+1}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(k+1)}+\dfrac{3}{2}$

On sait que $u_{k+1}=\dfrac{1}{3}u_k+1$ et $u_k=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{3}{2}$ donc $u_{k+1}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{3}{2}\right)+1$

d'où $u_{k+1}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1}+\dfrac{3}{2}$ donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : nous pouvons alors affirmer que la propriété est vraie pour tout rang *n*.

Quand la récurrence n'est d'aucun secours...

Exemple 1 : on a l'initialisation, mais pas l'hérédité

On appelle **nombre de Fermat** le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout entier naturel *n*, F_n est premier.

Je vous laisse tester pour les premières valeurs de *n*...

Dans ce cas, on ne peut pas montrer que la propriété est héréditaire et donc on ne peut pas en déduire que la propriété est vraie pour tout *n*.

À lire : ce poster réalisé dans le cadre de la fête de la sciences par l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand : http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/posters/posters/p_mathsamus_vert4_A4.pdf

Exemple 2 : on a l'hérédité, mais pas l'initialisation

Soit P_n la propriété : « 6 divise $7^n + 1$ pour tout entier $n \geqslant 0$ »

Montrer que cette propriété est héréditaire c'est montrer que **si** elle est vraie au rang *k* **alors** elle reste vraie au rang $k+1$.

Si $7^k + 1 = 6 \times p$, $p \in \mathbb{Z}$ alors $7^{k+1} + 1 = 7^k \times 7 + 1 = (6p - 1) \times 7 + 1 = 42p - 7 + 1 = 6 \times (7p - 1) = 6 \times p'$ où $p' = 7p - 1$ est un entier

On a donc montré que **si** P_k est vraie **alors** P_{k+1} reste vraie.

P_n est une propriété **héréditaire**.

Or la proposition est fausse pour $n = 0$ …

En effet $7^0 + 1 = 1$ et 6 ne divise pas 1... on n'a pas l'initialisation, on ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières *n* autres que 0. En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières *n* (facile à montrer en spécialité avec les congruences).

Exemple 3 (on a l'hérédité, mais pas l'initialisation) : page 12 de votre manuel

Lien cours en vidéo
Effectuer une démonstration par récurrence - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=H6XJ2tB1_fg&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=2
Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=OIUi3MG8efY&index=4&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ
Démontrer par récurrence la monotonie d'une suite - Terminale
https://www.youtube.com/watch?v=nMnLaE2RAGk&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=5