Suites numériques (I)
Limites de suites

Compétences	*Exercices résolus*
Notion de limite	*Savoir-faire 2 p 15 ; 56 p 25* *Exemples 1 et 2*
Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel *A*, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel (u_n) est supérieur à *A*.	*Savoir-faire 3 page 15* *Exemple 3*
Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. Savoir lever une indétermination.	*Savoir-faire 4 p 17 - 5 p17* *Applications 2 et 3 ; 76 p 26*

1. Ce qui a été vu en 1S et qui doit être su...

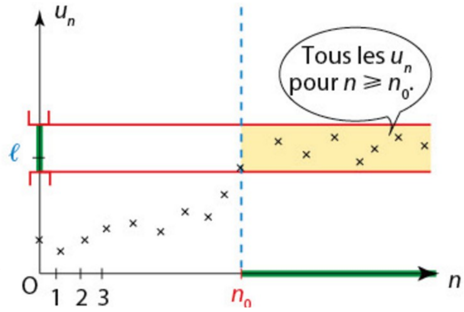
Les notions de 1S doivent être maîtrisées. Plusieurs options si ce n'est pas le cas...

- Reprendre vos cours de 1S, refaire les exemples.
- Rappels du cours (sans exemples) dans votre manuel de TS page 385
- Cours de Y. Monka avec lien vidéo (généralités d'une suite) : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Suites.pdf
    - Calculer les premiers termes d'une suite à la main, avec une calculatrice, un tableur, un algorithme.
    - Représenter graphiquement les termes d'une suite.
    - Étudier les variations d'une suite en étudiant le signe de $u_{n+1}-u_n$.
    - Conjecturer à la calculatrice le comportement à l'infini d'une suite.
- Cours de Y. Monka avec lien vidéo (suites arithmétique/géométrique) : http://www.maths-et-tiques.fr/telech/SuitesAG.pdf
    - Définition, expression explicite d'une suite arithmétique (géométrique)
    - Démontrer qu'une suite est ou n'est pas arithmétique (géométrique).
    - Somme des termes d'une suite arithmétique (géométrique).

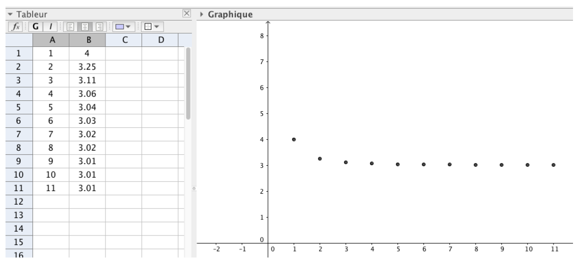
2. Limite d'une suite

a) Suites convergentes

Définition 1 : une suite (u_n) converge vers le réel L si tout intervalle ouvert contenant L, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \text{L}$.



Dire que (u_n) converge vers L, c'est dire que pour n'importe quel tuyau contenant L (même tout petit petit), il existe un rang n_0 (lié au tuyau) à partir duquel tous les termes de (u_n) sont dans le tuyau.



Exemple 1 : (u_n) est la suite définie par $u_n = 3+\dfrac{1}{n^2}$, $n\neq 0$.

On *conjecture* avec le tableur de *GeoGebra* que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Soit un intervalle $]a\,;b[$ ouvert contenant le réel 3, par exemple]2,999 ; 3,01[.

On cherche un rang n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $u_n \in]2,999\,;3,01[$

- Pour tout entier $n\geqslant 1$, $u_n = 3+\dfrac{1}{n^2} > 3 > 2,999$

- $3+\dfrac{1}{n^2} < 3,01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} < 0,01 \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n > 10$, *n* étant strictement positif.

Conclusion, à partir de $n=11$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle]2,999 ; 3,01[.

Reste à trouver n_0 pour **n'importe quel** intervalle $]a;b[$ ouvert contenant le réel 3 i.e. tel que $a<3<b$.
On veut trouver n_0 tel que si $n\geqslant n_0$, alors $a<u_n<b$

- Puisque $a<3$ et que tous les termes u_n sont supérieurs à 3, tous les termes u_n sont supérieurs à *a*.
- On pose $b=3+\varepsilon$ *où* $\varepsilon>0$ *en maths,* ε *désigne traditionnellement un réel tout petit petit...*

$u_n<b\Leftrightarrow 3+\frac{1}{n^2}<3+\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n^2>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ donc $n_0=\mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$ convient.

On a donc prouvé que, pour tout intervalle ouvert contenant le réel 3, il existe un n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $u_n\in]a;b[$. On a donc prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

Il n'est pas toujours facile de montrer la convergence d'une suite. On utilise souvent à des suites de référence.

Suites de référence ayant pour limite 0 :
Les suites de termes généraux : $\left(\boldsymbol{\frac{1}{n}}\right)$; $\left(\boldsymbol{\frac{1}{n^2}}\right)$; $\left(\boldsymbol{\frac{1}{n^k}}\right)$ avec $k\in\mathbb{N}$; $\left(\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$ convergent vers 0.

b) Suites divergentes

Définition 2 : une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

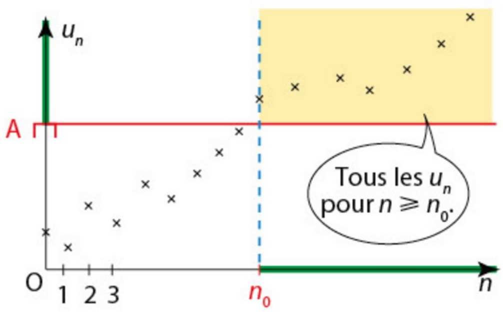
Converger c'est avoir une limite finie, diverger c'est, soit avoir une « limite » infinie, soit ne pas avoir de limite.

La suite définie par $u_n=(-1)^n$ diverge et n'a pas de limite, ses termes sont alternativement 1 et -1 .

La suite définie par $u_n=n^2$ diverge vers $+\infty$.

Limite infinie

Définition 3 : une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si, tout intervalle du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 . On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.



Autrement dit, quel que soit le réel A (aussi grand que l'on veut), à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite dépassent A.

Exemple 2 : montrons que la suite définie par $u_n=n^2$ diverge vers $+\infty$.

Prenons $\mathrm{A}=10^6$. $n^2>10^6$ et $n>0\Leftrightarrow n>10^3$ donc pour tout $n>n_0=10^3$, $u_n\in]10^6;+\infty[$

Reste à montrer que, quel que soit A, on peut trouver un n_0 .

Si $\mathrm{A}\leqslant 0$, alors $n_0=1$ convient.

Si $\mathrm{A}>0$, $n^2>\mathrm{A}\Leftrightarrow n>\sqrt{\mathrm{A}}$ donc $n_0=\mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{A}})$ convient.

Bilan : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Il n'est pas toujours facile de montrer qu'une suite converge vers $+\infty$ d'où les limites de référence.

Suites de référence ayant pour limite + ∞ :
Les suites de termes généraux : $(\boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{n^2})$, $(\boldsymbol{n^k})$ où k a ⸝ , $(\sqrt{\boldsymbol{n}})$ ont pour limite $+\infty$.

Définition 4 : Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si la suite $-(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Deux vidéos qui résument les différents cas : J'aicompris(https://www.youtube.com/watch?v=Ztt2MH630sQ) et Mathrix (https://www.youtube.com/watch?v=7jUzal6V70c)

2. Théorèmes généraux sur les limites de suites

► Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n =$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

► Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0	Quand le tableau indique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n=\infty$, on utilise la règle des signes pour conclure.
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞	
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\times L'$	∞	∞	On ne peut pas conclure	

► Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L $\neq 0$	∞	∞	0	Quand le tableau indique , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=\infty$, on utilise la règle des signes pour conclure.
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	∞	0	L	∞	0	
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	∞	∞	On ne peut pas conclure	On ne peut pas conclure	

Application 2 : Appliquer les théorèmes généraux sur les limites

a) $u_n=3n^2+2n-10$, $n\in\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-10=+\infty$ donc « par somme des limites », $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

b) $v_n=(2-n)(n^2+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1=+\infty$ donc « par produit des limites », $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$

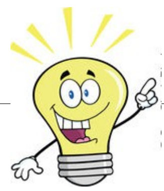
c) $w_n=\dfrac{1}{n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1=+\infty$ donc « par quotient des limites », $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$

Un autre exemple en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=v7hD6s3thp8&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=6

On dit que l'on a une forme indéterminée lorsque les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure.

Les types de formes indéterminées sont $+\infty-\infty$ ***;*** $0\times\infty$ ***;*** $\frac{0}{0}$ *et* $\frac{\infty}{\infty}$.

Votre travail va consister à « lever l'indétermination ».



Limite d'un polynôme : On factorise par le terme de plus haut degré !

Exemple : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=n^2-6n+3$

On est en présence d'une forme indéterminée du style « $+\infty-\infty$ ».

C'est le terme n^2 qui croît le plus vite et intuitivement il va « l'emporter » ! On factorise n^2 :

$u_n=n^2-6n+3=n^2\left(1-\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}\right)$ On est au voisinage de $+\infty$ donc $n\neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=1$ On utilise les limites de références vues plus haut.

donc par « produit de limites » : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Limite d'une fonction rationnelle : on factorise par le terme de plus haut degré puis on simplifie.

Exemple : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2-4}{-n+3}$

On est en présence de la forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».
C'est le numérateur qui croît le plus vite et qui va « l'emporter » sur le dénominateur !

$$u_n = \frac{n^2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}{n\left(-1+\frac{3}{n}\right)} = n \times \frac{1-\frac{4}{n^2}}{\left(-1+\frac{3}{n}\right)}$$
On est au voisinage de $+\infty$ donc $n \neq 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-\frac{4}{n^2}}{\left(-1+\frac{3}{n}\right)} = -1$ *donc par « produit de limites » :* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Ex 13 à 16 p 22 - 67 à 70 p 26

D'autres exemples en vidéos : Calculer la limite d'une suite avec une forme indéterminée
https://www.youtube.com/watch?v=RQhdU7-KLMA&index=7&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ
https://www.youtube.com/watch?v=wkMleHBnyqU&index=8&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ
https://www.youtube.com/watch?v=loytWsU4pdQ&index=9&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ
https://www.youtube.com/watch?v=9fEHRHdbnwQ&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=10

3. Algorithme de seuil

Déterminer, à l'aide d'un algorithme, le seuil A à partir duquel $u_n \geqslant A$ dans le cas où (u_n) est une suite croissante de limite infinie.

Exemple 3 : (u_n) est la suite définie par $u_n = 3n^2+2$ pour tout entier n.
Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n > 10^3$.

a) On prouve que (u_n) est une suite croissante (étude du signe de $u_{n+1}-u_n$)

b) On prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) On cherche le plus petit entier n tel que $3n^2+2>1000$.

On prouve que pour tout $n > \sqrt{\dfrac{998}{3}} \approx 18{,}2$, $u_n > 1000$.

Donc à partir de $n=19$, tous les termes de la suite dépassent 1000.

Il n'est pas toujours facile de déterminer à la main le seuil, l'inéquation à résoudre peut s'avérer compliquée...
L'algorithme permet de trouver le seuil à partir duquel, pour un A donné, tous les termes d'une suite croissante et convergeant vers $+\infty$ dépassent ce seuil A.

Voici, écrit ci-dessous un algorithme avec le logiciel *Algobox* qui détermine le rang à partir duquel $u_n > A$.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  U PREND_LA_VALEUR 2
  LIRE A
  TANT_QUE (U<A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    U PREND_LA_VALEUR 3*pow(n,2)+2
    FIN_TANT_QUE
```

Console

```
***Algorithme lancé***
Entrer A : 1000
19
***Algorithme terminé***
```

Si on saisit A=1000, l'algorithme affiche 19, le rang du 1er terme de la suite supérieur à 1000.

Programme à saisir sur votre calculatrice, pour vous aider :
Vidéo Yvan Monka (TI) : https://www.youtube.com/watch?v=Kza3KBjjsM0
Vidéo Yvan Monka (Casio) : https://www.youtube.com/watch?v=9HhEeMWimNo

Ex 60 ; 61 p25