Suites Numériques (II)
Limites de suites : théorèmes de comparaison - Limite de q^n

Compétences	*Exercices corrigés*
Déterminer une limite par comparaison. ROC : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors (v_n) tend vers + ∞ quand *n* tend vers +∞.	*Savoir-faire 6 p 19* *Application 1*
Savoir utiliser le théorème « des gendarmes » (admis)	*Application 2*
Limite d'une suite géométrique : ROC : Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$	*Application 3* *Savoir-faire7 p 19 ; 76 p 26*

1. Limites et comparaison

Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
$u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Preuve (ROC) :

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ donc pour tout réel A, il existe un entier *p* tel que si $n \geqslant p$, alors $u_n \in]\mathrm{A}\,;+\infty[$.

Or $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang donc il existe un réel *k* tel que pour tout $n \geqslant k$ $u_n \leqslant v_n$.

Soit N un entier supérieur ou égal à *p* et *k* c'est-à-dire *N > max (p,k)*;

On a donc pour tout $n \geqslant N$, $v_n > A$ donc $v_n \in]\mathrm{A}\,;+\infty[$. On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Application 1 : déterminer une limite par comparaison

Exemple 1 : déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n=(-1)^n+n^3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ mais $(-1)^n$ n'a pas de limite : selon la parité de *n*, $(-1)^n$ vaut alternativement -1 ou 1.

Les théorèmes vus dans le chapitre précédent ne permettent pas de conclure.

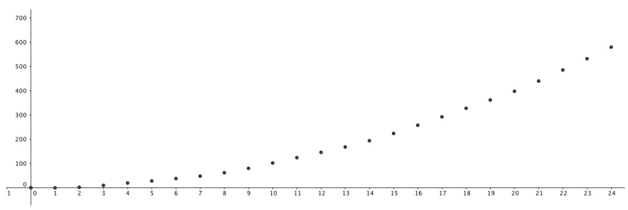
On a pour tout entier *n*, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-1+n^3 \leqslant (-1)^n+n^3 \leqslant 1+n^3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -1+n^3=+\infty$ et $-1+n^3 \leqslant u_n$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Exemple 2 : déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n=n^2-3\sin(n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n)$ n'existe pas.

Les théorèmes vus dans le chapitre précédent ne permettent pas de conclure. On peut conjecturer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$



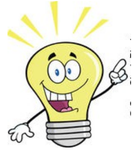
Pour tout entier *n*, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $3 \geqslant -3\sin(n) \geqslant -3$ et $n^2-3 \leqslant n^2-3\sin(n) \leqslant n^2+3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-3=+\infty$ et pour tout entier *n*, $u_n \geqslant n^2-3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Vidéo : Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème de comparaison (maths-et-tiques) :
https://www.youtube.com/watch?v=iQhh46LupN4&index=11&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ

Théorème dit « des gendarmes » (admis) : Soit u_n, v_n et w_n trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si u_n, et w_n convergent vers un réel L, alors v_n converge aussi vers L.

Application 2 : Déterminer une limite par encadrement



Exemple 1 : déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

$(-1)^n$ n'a pas de limite : selon la parité de *n*, $(-1)^n$ vaut alternativement -1 ou 1.

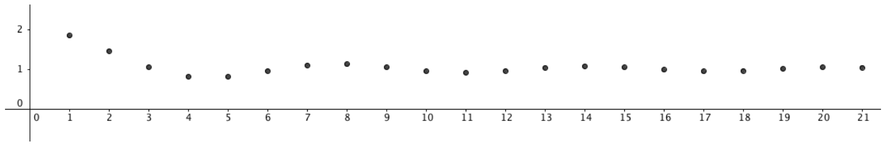
On a pour tout entier *n*, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $\forall n \neq 0$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exemple 2 : déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(n)$ n'existe pas. Les théorèmes vus dans le chapitre précédent ne permettent pas de conclure.

On peut conjecturer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$



Pour tout $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$

Soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ Soit $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$; on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

u_n et v_n ont les mêmes limites ; d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Vidéo : Calculer une limite à l'aide du théorème d'encadrement (maths-et-tiques)
https://www.youtube.com/watch?v=OdzYjz_vQbw&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ&index=12

2. Limite de q^n, *q* est un réel

Propriété :

q^n	$q \leqslant -1$	$-1 \leqslant q \leqslant 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	n'existe pas	0	1	$+\infty$ **ROC**

L'idée est de montrer que q^n est supérieur à quelque chose qui tend vers $\pm\infty$.

Étape n°1 : montrer *par récurrence* que pour $a > 0$ et tout entier naturel *n* : $(1+a)^n \geqslant 1 + an$.

Étape n°2 : $q > 1$ donc on peut écrire *q* sous la forme $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

On a donc $q^n = (1+a)^n$ et on a montré que $(1+a)^n \geqslant 1 + an$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + an = +\infty$ car $a > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice : Utiliser la limite de q^n

Déterminer les limites des suites définies respectivement par $u_n = -3 \times 2^n$; . $v_n = \dfrac{2}{5^n}$; $w_n = 5 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Vidéo : Calculer la limite d'une suite géométrique (maths-et-tiques) :
https://www.youtube.com/watch?v=XTftGHfnYMw&index=13&list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ

Ex 18 à 24 p 22 - 25 à 31 p 23 - 71 à 77 p 26