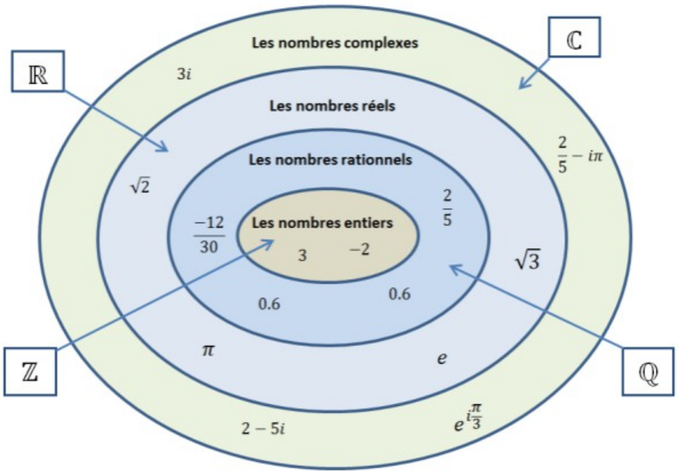
Les nombres complexes (I)
Forme algébrique d'un nombre complexe

Compétences	*Exercices corrigés*
Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes - Mettre sous forme algébrique un nombre complexe - Utiliser les propriétés du conjugué d'un nombre complexe	*Savoir-Faire 1 page 201* *Savoir-Faire 3 page 203* *67 page 213*
Utiliser l'égalité de deux nombres complexes	*Savoir-Faire 2 page 201*
Savoir représenter un complexe, lire l'affixe d'un complexe. Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur	*Savoir-Faire 5 page 205 ;* *Savoir-Faire 6 page 205 ; 15 p 210*

Introduction : vidéo à consulter sans modération :
https://youtu.be/2GwSUDm_Rg8

L'Activité *1 page 198* permet de revoir les différents ensembles de nombres.



Source : wattsupscience.wordpress.com

- *i* n'est pas un nombre réel (il n'est pas sur la droite des réel). On l'appelle nombre imaginaire.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1. Définitions et vocabulaire

Théorème (admis) et définition : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

(1) L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

(2) Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{C}$ contient un nombre noté **i** tel que $\boldsymbol{i^2=-1}$.

(4) Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière **unique** $\boldsymbol{z=a+ib}$ avec *a* et *b* réels.

Vocabulaire : L'écriture $\boldsymbol{z=a+ib}$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe *z*

a est la **partie réelle** de *z* : elle est notée **Re(z)**.

b est la **partie imaginaire** de *z* : elle est notée **Im(z)**.

Exemples :

- $z=-4+5i$ on a $z\in\mathbb{C}$; $z\notin\mathbb{R}$; $\Re\mathrm{e}(z)=-4$ et $\Im\mathrm{m}(z)=5$
- $z=\sqrt{3}$ on a $z\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{R}$; $\Re\mathrm{e}(z)=\sqrt{3}$ et $\Im\mathrm{m}(z)=0$
- $z=-3i$ on a $z\in\mathbb{C}$ **;** $z\notin\mathbb{R}$ **;** $\Re\mathrm{e}(z)=0$ **et** $\Im\mathrm{m}(z)=-3$

Propriétés

a) Un nombre complexe est un réel si, et seulement si, $\Im\mathrm{m}(z)=0$.

Soit z un nombre complexe, alors : $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Im\mathrm{m}(z)=0$

b) Un nombre complexe est un imaginaire pur si, et seulement si, $\Re\mathrm{e}(z)=0$

Soit z un nombre complexe, alors : $z\in\mathbb{C} \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(z)=0$

c) Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Soit z un nombre complexe, alors : $z=0 \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(z)=0$ **et** $\Im\mathrm{m}(z)=0$

d) Deux nombres complexes son égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Soit z et z' deux nombres complexes, alors $z=z' \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(z)=\Re\mathrm{e}(z')$ et $\Im\mathrm{m}(z)=\Im\mathrm{m}(z')$

2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

On utilise $\boldsymbol{i^2=-1}$.

Propriétés

L'opposé de $z=a+ib$ est le nombre complexe $-z=-a-ib$.

Somme de deux complexes : $z+z'=(a+a')+i(b+b')$ *Preuve*

Produit de deux complexes : $z\times z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$. *Preuve*

L'inverse d'un complexe non nul : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$. *Preuve*

Le quotient de deux complexes : $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}$, $z'\neq 0$.

Exemple 1 : soit $z=-3+2i$ et $z'=8-i$. Donner la forme algébrique de $z+z'$; zz' ; $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z}{z'}$

$$z+z'=-3+2i+8-i=5+i$$
$$zz'=(-3+2i)(8-i)=-24+3i+16i-2i^2=-24+19i+2=-22+19i$$
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{-3+2i}=\frac{-3-2i}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-3-2i}{9-4i^2}=\frac{-3-2i}{9+4}=\frac{-3-2i}{13}$$
$$\frac{z}{z'}=\ldots=\frac{-26+19i}{65}$$

Exemple 2 : Soit x et y deux nombres réels et soit Z le complexe défini par $Z=(2x+3i)+(-3+4iy)$.

À quelle condition sur x et y , Z est il réel ? un imaginaire pur ?

$Z=(2x+3i)+(-3+4iy)=2x-3+i(3+4y)$ on a la forme algébrique de Z

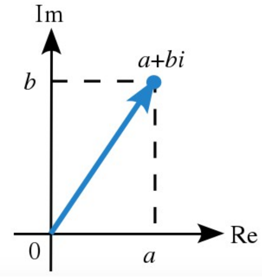
$Z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Im\mathrm{m}(Z)=0 \Leftrightarrow 3+4y=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{4}$ $Z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re\mathrm{e}(Z)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Exemple 3* : n°69 page 213

Ex 1 à 6 p 210 - 36 à 43 p 212 - 46 à 52 p 212 ; 54 à 56 p 213

3. Représentation géométrique

a. Affixe d'un point



Définition
On appelle *plan complexe* le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
- À tout nombre complexe $z=a+ib$ on associe un point $\mathrm{M}(a;b)$.
M est le *point image* de *z*. On note M(*z*).
-À tout point $\mathrm{M}(a;b)$ du plan on associe le nombre complexe $z=a+ib$.
z est *l'affixe* du point M

Propriété
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B} .

Le milieu du segment [AB] a pour affixe $\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}$.

b. Affixe d'un vecteur

Définition
- À tout nombre complexe $z=a+ib$ on associe un le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
$\vec{w}$ est le vecteur *image* de *z*.
- À tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ du plan on associe le nombre complexe $z=a+ib$.
z est *l'affixe* du vecteur $\vec{w}$.

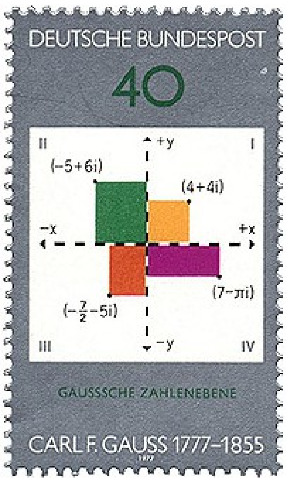
Propriétés
Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B} .

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}$ *Preuve*

Soit w et w' deux vecteurs d'affixes respectives *z* et z'

$\vec{w}+\vec{w'}$ a pour affixe $z+z'$ et, pour tout réel k, $k\,\vec{w}$ a pour affixe $k\,z$. *Preuve*

Ex 12 à 14 p 210 ; 90 ; 96 page 215



C'est dans sa thèse de doctorat que Gauss démontre complètement (1799) le théorème fondamental de l'algèbre (énoncé au préalable par ***Girard*** et démontré partiellement par ***d'Alembert***) de quatre façons différentes mettant en œuvre un usage géométrique des ***nombres complexes*** avant d'en donner une preuve plus algébrique 40 ans plus tard :

Tout polynôme d'une variable complexe, de degré n, admet n racines complexes (éventuellement égales)

Source : ChronoMaths : ***http://serge.mehl.free.fr/chrono/Gauss.html***

4. Conjugué d'un nombre complexe

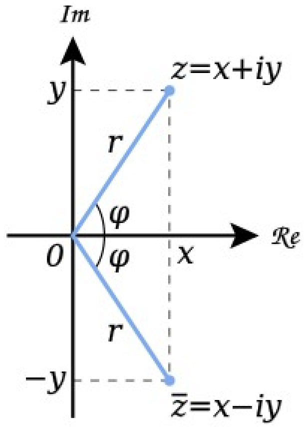
Définition: Soit $z=a+ib$
On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z}=a-ib$

Exemples : Donner le conjugué des complexes suivants :

Si $z=2-5i$, alors $\overline{z}=2+5i$ Si $z=-4-i$, alors $\overline{z}=-4+i$

Si $z=-5$, alors $\overline{z}=-5$ Si $z=3i$, alors $\overline{z}=-3i$

Représentation graphique de $\overline{z}$



Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés : Soit *z* et *z*' deux nombres complexes.

(1) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ *Preuve*

(2) $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ *Preuve*

(3) $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ pour tout entier *n*. *Preuve par récurrence*

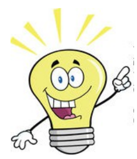
(4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$, pour $z\neq 0$ *Preuve*

(5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, pour $z'\neq 0$ *Preuve*

(6) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$ *Preuve*

(7) $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}=-z$ *Preuve*

(8) Si $z=a+ib$ alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$ *Preuve*



Exemple 1 : Donner le conjugué de $z=-i(1+4i)$

$z=z_1\times z_2$ avec $z_1=-i$ et $z_2=1+4i$ donc $\overline{z}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}=i\times(1-4i)=i-4i^2=4+i$

Exemple 2 : Soit $z_1=\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ et $z_2=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. Que peut-on dire, sans les calculer, de z_1+z_2 et de z_1-z_2 ?

$\overline{z_2}=\frac{\overline{2+i}}{\overline{1-i}}=z_1$ donc $z_1+z_2=\overline{z_2}+z_2=2\times\Re\mathrm{e}(z_2)$ et $z_1-z_2=\overline{z_2}-z_2=-2\times\Im\mathrm{m}(z_2)$

Ex7 et 8 p 210 - 65 ; 66 ; 68 ; 69 ; 71 p 213 - Vrai/Faux 75 à 77 p 214