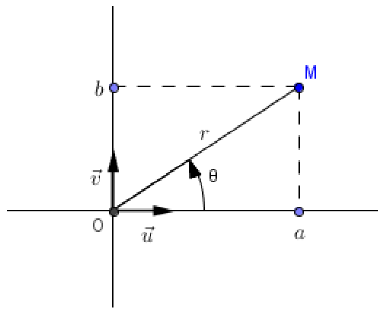
Les nombres complexes (III)
Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

Compétences	*Exercices corrigés*
Déterminer le module et un argument d'un complexe Savoir les utiliser	*Savoir-faire 7 et 8 page 205 / 207* *7 page 205 ; 104 page 215*
Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement Interpréter géométriquement les modules et les arguments	*Savoir-faire 8 page 207*
Utiliser les propriétés des modules et des arguments	*Savoir-faire 9 page 207 ; 125 page 216*

Introduction : vidéo de la partie I, 2ème moitié à revoir :
https://youtu.be/2GwSUDm_Rg8

Activité CPX02

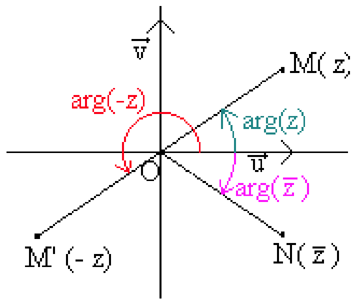


I Module et argument d'un nombre complexe

Définitions :
Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

Le module de z, noté |z|, est la distance OM

Un argument du complexe non nul z, noté $\arg(z)$, est une mesure *en radian* de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.



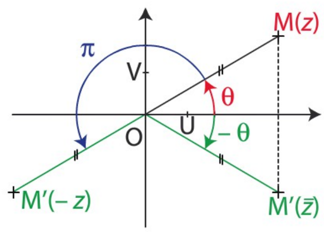
Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z=x+iy$.

(1) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $|z|^2=z\times\bar{z}$

(3) $|-z|=|z|$ et $\arg(-z)=\arg(z)+\pi\quad[2\pi]$

(4) $|\bar{z}|=|z|$ et $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\quad[2\pi]$



Exemple 1 : Déterminer le module et un argument de $z=-1+i$

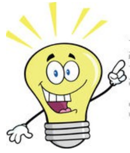
$z=-1+i$, alors $|z|=|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

Un quiz en ligne pour les lectures de modules et arguments :
http://homeomath2.imingo.net/exercice_complexe8.php?ans=3&note=0&niveau=1

Ex 16 22 et 23 page 210 (lectures graphiques)

Ex 17 p 210 ; 18 à 21 p 211

Remarques :



$|z|=0 \Leftrightarrow z=0$; mais le réel 0 n'a pas d'argument (l'angle n'est pas défini si M est en O).

Tout réel strictement positif a un argument égal à 0

Tout réel strictement négatif a un argument égal à π.

z est un réel non nul $\Leftrightarrow$ $\arg(z)=0 \quad [2\pi]$ ou $\arg(z)=\pi \quad [2\pi]$

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive, a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative, a un argument égal $-\frac{\pi}{2}$

z est un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ $\arg(z)=\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $\arg(z)=-\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

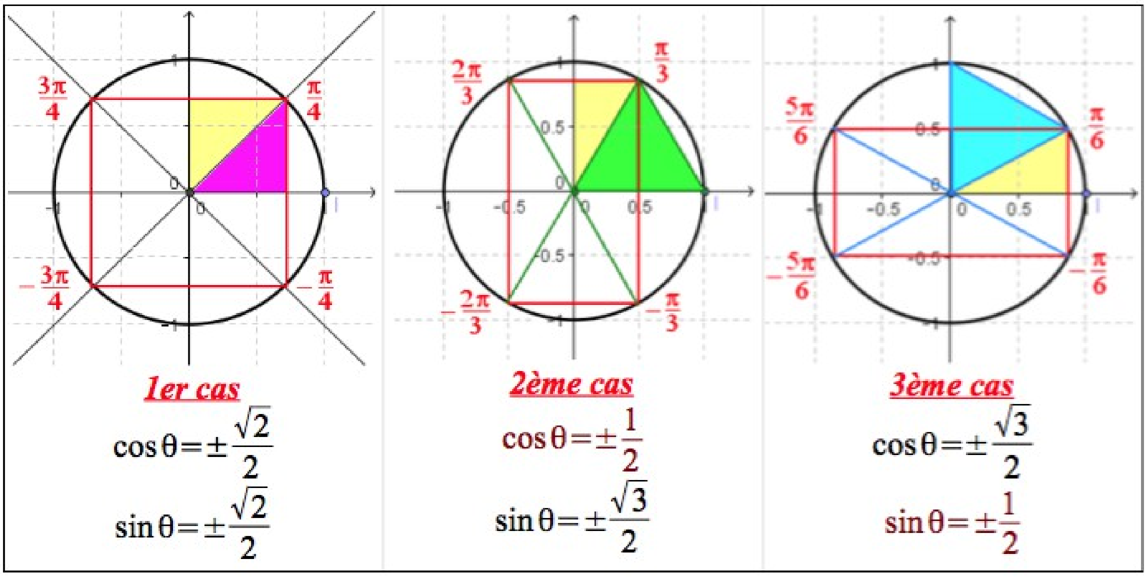
Méthode pour trouver un argument θ d'un nombre complexe

Déterminer un argument de $z=-1+i$

On cherche θ tel que $\cos(\theta)=\frac{\Re e(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta)=\frac{\Im m(z)}{|z|}$

$|z|=\sqrt{2}$ donc $\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta=\frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

Bien connaître les angles remarquables du cercle trigonométrique est un atout...



Source : A. Abouhazim ; www.logamaths.fr

Exercices en ligne pour calculer des modules et arguments (brouillon indispensable)

http://homeomath2.imingo.net/interactif393.htm

II Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : z est un nombre complexe z non nul, r un réel strictement positif et θ un réel.
$|z|=r$ et $\arg(z)=\theta\ [2\pi] \Leftrightarrow z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$
Cette écriture est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exemple 2 : Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

$z=i$ $|i|=1$ et $\arg(i)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc la forme trigonométrique de i est $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$z=-3$ $|-3|=3$ et $\arg(-3)=\pi\ [2\pi]$ donc la forme trigonométrique de -3 est $3(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$

$z=-1+i\sqrt{3}$ $|z|=2$ $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

donc la forme trigonométrique de z est $z=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exemple 3 : Déterminer la forme algébrique du complexe z de module 6 et d'argument $\frac{5\pi}{6}$.

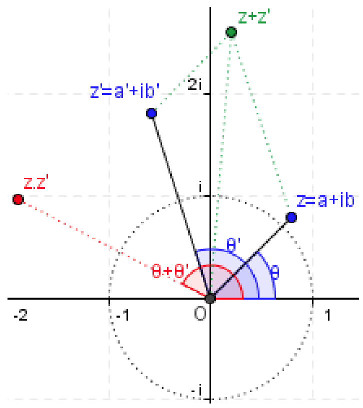
Son écriture trigonométrique est : $6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Son écriture algébrique est donc : $z_1=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=3\sqrt{3}+3\mathrm{i}$

Ex 25 ; 27 ; 28 p211 - 114 à 122 p 216

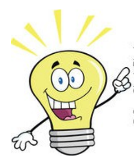
III Opérations sur les modules et les arguments

Les nombres complexes ajoutent donc une nouvelle dimension aux nombres réels ! Cette représentation est appelée plan d'Argand ou plan complexe. Dans ce plan, le nombre complexe a+ib sera vu comme le point (a,b) : l'abscisse du point est la partie réelle du nombre, et l'ordonnée sa partie imaginaire. Additionner ou multiplier des complexes prend alors un tout nouveau sens, un sens géométrique ! Une somme de deux complexes peut se voir comme la construction d'un parallélogramme, et le produit de deux complexes est une somme d'angles et un produit de longueur...



Extrait du site Choux romanesco, vache qui rit et intégrales curvilignes.
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2009/10/31/15632070.html

Propriétés : z et z' sont deux nombres complexes non nuls



(1) Produit : $|zz'|=|z|\times|z'|$ et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$

(2) Puissance : $|z^n|=|z|^n$ pour tout entier n et $\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

(3) Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$

(4) Quotient : $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$ *Preuves*

La preuve de $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ ***nécessite de connaître quelques relations trigonométriques***

Formules d'addition

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ $\qquad$ $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$ $\qquad$ $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

$\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ $\qquad$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Exemple 4 : soit z tel que $\begin{cases}|z|=3\\ arg\, z=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ et soit z' tel que $\begin{cases}|z'|=5\\ arg\, z'=\frac{-\pi}{3}\end{cases}$.

$|z^2|=|z|^2=3^2=9$ et $arg(z^2)=2\times arg(z)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

$|zz'|=|z|\times|z'|=3\times5=15$ et $arg(zz')=arg\, z+arg\, z'=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{12}\quad[2\pi]$

$\frac{|z|}{|z'|}=\frac{3}{5}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg\, z-arg\, z'=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}\quad[2\pi]$

Exemple 5 : soit $z=(1+i)^8$ déterminer $|z|$ et $\arg(z)$

$|z|=|(1+i)^8|=|1+i|^8=16$ $\qquad$ $\arg(z)=\arg((1+i)^8)=8\arg(1+i)=8\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$

Ex 29 ; 30 31 page 211 - 123;126 et 127 page 216

IV Longueurs et modules

Propriété
Si les points A et B dont pour affixe z_A et z_B, alors la longueur AB est égale à $|z_B-z_A|$
AB= $|z_B-z_A|$ = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ *Preuve*

Exemple 6 : a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+z+1=0$.

b. On appelle A le point d'affixe 1, B et C les points d'affixes z_1 et z_2 solutions de (E).

c. Calculer AB, AC et BC puis en déduire la nature du triangle *ABC*.

Exemple 7 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que |z–3|=2
Soit A le point d'affixe 3 ; on cherche l'ensemble des points M tels que AM=3
C'est l'ensemble des points situés à 3 unité de A donc situés sur le cercle de centre A et de rayon 3.

Exemple 8 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z+1-2i|=|z-2+2i|$
Soit A le point d'affixe $-1+2i$ et B le point d'affixe $2-2i$; on cherche l'ensemble des points M tels que AM=BM c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de A et B
M est donc sur la médiatrice du segment [AB].

Ex 102 à 113 page 215

V Angles et arguments

Propriété

$A(z_A)$; $B(z_B)$; $C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont 4 points du plan complexe. $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$

On a $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Preuve*

Exemple 9 : Soit A, B et C trois d'affixes respectives $1-i$; $2+i$ et $3-2i$

Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Une méthode consiste à calculer les longueurs AB, AC et BC puis de conclure. (paragraphe IV)

Une autre méthode (plus complexe) consiste à montrer que $\dfrac{AC}{AB} = 1$ et $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$

Soit $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$Z = \ldots = -i$ donc $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}$ (2π)

Bilan $|Z| = \dfrac{AC}{AB} = 1$ donc AB=AC et ABC est isocèle en A

$\arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle en A

Ex 149 et 151 p 217 ; 154 ; 157 ; 158 ; 159 et 160 p 218