CHAPITRE 3
GRAPHES PROBABILISTES

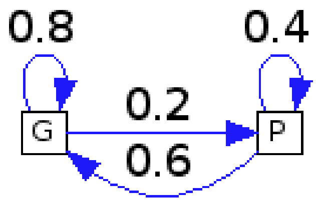
1. Graphe probabiliste

Dans cette partie du programme, on va s'intéresser à **l'évolution de systèmes** qui peuvent se trouver dans certains états et changer d'état selon certaines probabilités.

L'objectif des exercices sera - de connaître cet état à tout instant,
- d'étudier comment il évolue,
- et de savoir s'il *se stabilise au bout d'un certain temps*.

Dans l'activité des Puces, on a un état initial (100 puces sur G, 0 puces sur P),
le nombre de puces sur chacun des podium varie après chaque saut,
on s'intéresse au nombre de puces sur G et P après 2, 3, 4, n sauts.

On a un graphe orienté et pondéré.

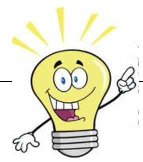


Les sommets du graphe représentent les **2 états** possibles :
être sur le Grand ou sur le Petit podium.

Chaque probabilité est une *probabilité conditionnelle* :

Sachant qu'une puce est sur G, la probabilité qu'elle y reste est 0,8 et la probabilité qu'elle change d'état est 0,2 (elle migre de G vers P).

Sachant qu'une puce est sur P, la probabilité qu'elle y reste est 0,4 et la probabilité qu'elle change d'état est 0,6 (elle migre de P vers G).



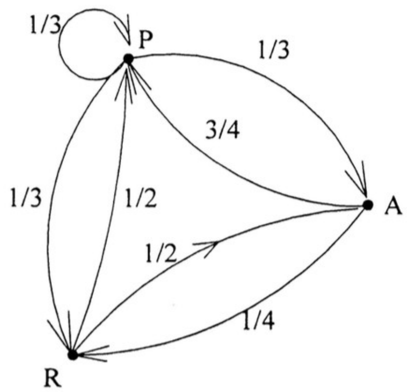
Définition : un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré tel que :
- Les sommets du graphe sont les issues possibles d'une expérience aléatoire ;
- Le poids d'une arête orientée partant du sommet i et allant vers le sommet j est la probabilité conditionnelle d'obtenir l'issue j à l'étape $n+1$ sachant que l'on a obtenu i précédente (à l'étape n).

Remarque : la somme des poids des arêtes partant d'un même sommet vaut 1.
Le poids des arêtes issues de G vaut 1 ($0{,}8+0{,}2$) , le poids des arêtes issues de P vaut 1 ($0{,}6+0{,}4$).

En TES on étudiera des systèmes à 2 ou 3 états pouvant évoluer au cours du temps modélisés à l'aide de graphes probabilistes à 2 ou 3 sommets.

Exemple 2 :

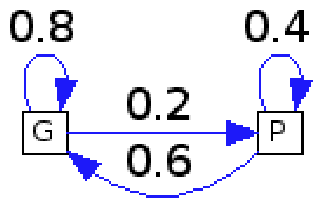
Le graphe ci-contre est un graphe probabiliste à **3 états** nommés P, A et R : la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut 1.



Activité « Les Puces », partie A
Exercices 9 à 14 page 78 ; n°53 page 82
Savoir-Faire n°6 page 76 (3 états différents donc 3 sommets)

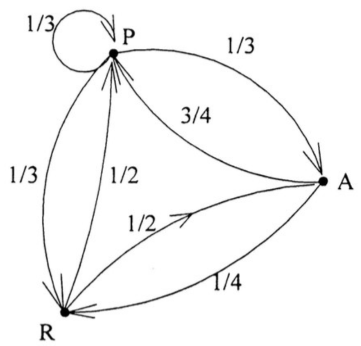
2. Matrice de transition

Revenons au cas des Puces sur leur podium (partie B)...



En prenant les sommets dans l'ordre alphabétique, on associe une matrice de transition M permettant de retrouver les valeurs des différentes transitions.

Ici on a $M=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$



Dans le cas de l'exemple 2 du paragraphe précédent, avec les sommets pris dans l'ordre alphabétique, la matrice de transition

est $M=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

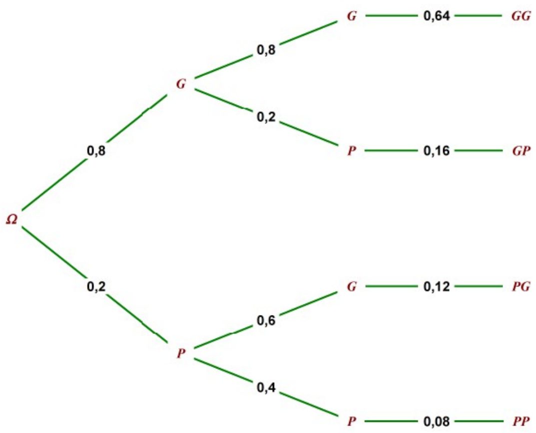
Définition : **la matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre n est *la matrice carrée d'ordre n* telle que le coefficient $a_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.
La somme des coefficients d'une même ligne vaut 1.

« Les Puces », partie B ; Exercices 15 à 18 page 79 ; n°54 p 82 ; Savoir-faire 7 page 76

3. État probabiliste

Ce qu'on appelle **état probabiliste**, c'est l'état du système à chaque étape. On note cet état à l'aide d'une matrice ligne. Si P_0 est l'état initial avec 100 % des puces sur G et 0 % sur P, on note $\mathbf{P_0}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

Pour déterminer P_1, P_2, on peut utiliser un arbre de probabilités :



On note P_1 *l'état du système après un saut* : $\mathbf{P_1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0{,}8} & \mathbf{0{,}2}\end{pmatrix}$

Interprétation : après un saut, 80 % des puces sont sur G et 20 % sont sur P.

On note P_2 *l'état du système après deux sauts* : $\mathbf{P_2}=\begin{pmatrix}\mathbf{0{,}76} & \mathbf{0{,}24}\end{pmatrix}$

Interprétation : après deux sauts, 76 % des puces sont sur G et 24 % sont sur P.

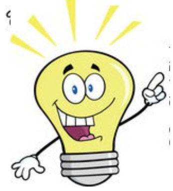
Etc... On note P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ qui donne les probabilités d'être sur G et P après n sauts.

Remarque : on a $a_n+b_n=1$ quel que soit n.

À partir de trois étapes, l'arbre commence à être fastidieux...

Propriété admise : si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, l'état probabiliste à l'étape $n+1$ s'obtient par $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n\times\mathrm{M}$.

Exemple des Puces : vous avez vérifié dans l'activité que $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_0\times\mathrm{M}$ et $\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_1\times\mathrm{M}$



Propriété admise : soit M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, P_0 *la* matrice décrivant l'état initial d'une expérience aléatoire et P_n l'état probabiliste à l'étape *n.* Alors, pour tout $n\geqslant 0$; $P_n=P_0\times M^n$.

Exemple des Puces : Pour déterminer P_4 et P_5 , on peut calculer respectivement $\mathrm{P}_0\times\mathrm{M}^4$ et $\mathrm{P}_0\times\mathrm{M}^5$

Exercices 19 à 22 page 79 ; n°55 page 83 ; n°60 p84 (sauf question 4) ; n°61 p 84 (sauf question 5)
Savoir-Faire n°8 page 77

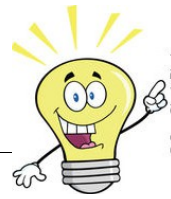
4. État stable

Un état probabiliste est stable lorsqu'il reste le même dans la répétition de l'expérience aléatoire ; il n'évolue plus.

Généralement, on note P_n l'état probabiliste à l'étape *n*
et s'il existe, P l'état stable.

Exemple des Puces, partie C : on a calculé l'état probabiliste au bout de 10 sauts puis 15 sauts.
On a trouvé $\mathrm{P}_{10}=(0{,}7500000256 \quad 0{,}249999974)$, $\mathrm{P}_{15}=(0{,}75 \quad 0{,}25)$, $\mathrm{P}_{16}=(0{,}75 \quad 0{,}25)$ ...

Il semble que l'état n'évolue plus, on ***conjecture*** qu'il se stabilise avec 75 % des puces sur G et 25 % des puces sur P.



Définition : Un état probabiliste *P* est stable lorsqu'il reste le même dans la répétition de l'expérience aléatoire décrite par la matrice de transition. On a alors $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$.

Propriété (admise) : Si **tous** les coefficients de la matrice de transition sont non nuls, l'état probabiliste à l'étape *n* converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0 .

Vous aurez deux types de questions : $\begin{cases}\textbf{\textit{vérifier que} P \textit{est un état stable}}\\ \textbf{\textit{trouver l'état stable} P}\end{cases}$

a. Le plus facile : vérifier que P est un état stable

Exemple dans le cas des Puces : montrer que $\mathrm{P}=(0{,}75 \quad 0{,}25)$ est l'état stable du système.

Méthode : calculer $\mathrm{P}\times\mathrm{M}$ avec $\mathrm{P}=(0{,}75 \quad 0{,}25)$ et $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$ puis vérifier que $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$!

b. Moins facile : trouver l'état stable

Méthode n°1 : Pour déterminer l'état stable P d'un système de matrice de transition M, il suffit de résoudre l'équation $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$ avec $\mathrm{P}=(x \quad 1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Exemple des Puces, partie D. On cherche $\mathrm{P}=(x \quad 1-x)$ tel que $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M} \Leftrightarrow (x \quad 1-x)=(x \quad 1-x)\times\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x \quad 1-x)=(0{,}8\,x+(1-x)0{,}6 \quad 0{,}2\,x+0{,}4(1-x))$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2\,x+0{,}6 & -0{,}2\,x+0{,}4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}2\,x+0{,}6 \\ 1-x=-0{,}2\,x+0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}8\,x=0{,}6 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

On a donc prouvé qu'il existe un état stable P tel que $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

Méthode n°2 : Pour déterminer l'état stable P d'un système de matrice de transition M, il suffit de résoudre l'équation $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$ avec $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $0\leqslant a\leqslant 1$ et $0\leqslant b\leqslant 1$.

On cherche $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que $\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M}$

$\mathrm{P}=\mathrm{P}\times\mathrm{M} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8a+0{,}6b & 0{,}2\,a+0{,}4\,b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0{,}8\,a+0{,}6\,b \\ b=0{,}2\,a+0{,}4\,b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2\,a-0{,}6\,b=0 \\ 0{,}2\,a-0{,}6\,b=0 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}2\,a-0{,}6b=0$

On a une équation avec deux inconnues... MAIS $a+b=1$ *donc* $a=1-b$

On résout donc $\begin{cases} 0{,}2\,a-0{,}6\,b=0 \\ a=1-b \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} a=0{,}75 \\ b=0{,}25 \end{cases}$

Exercices 23 à 26 page 79 : attention à l'énoncé ; n° 27 p 79

Exercices 56 ; 58 p 83 ; n°59 ; 60 (question 4) et 61 (question 5) ; 65 p 84

Sujets B, C et D page 91/92

Savoir-Faire n°9 page 77 et n°57 page 83

Exercice

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte.

Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain (S) c'est-à-dire non malade et non immunisé. D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;

- étant sain, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.

2. Conjecturer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, six mois, un an dans chacune des situations suivantes :

a. au départ, il est immunisé. **b.** au départ, il est sain. **c.** au départ, il est malade.

Vidéo : Yvan Monka : https://youtu.be/PS756B-M0Dw