**AP : récurrence (séances du 10/11 et 17/11)**

**Exercice 1 :** Soit $x$ un réel, $x \neq 1$

Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $1+x+x^2+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .

Correction Exercice 1

**Exercice 2 :** Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ , $\sum_{q=1}^{n} q^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Correction Exercice 2

**Exercice 3 :** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=2$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=2u_n+1$ .
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$ , $u_n=3\times 2^n-1$ .

Correction Exercice 3

**Exercice 4:** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ : $u_{n+1}=u_n+4n-6$ .
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ , $u_n=2n^2-8n$ .

Correction Exercice 4

**Exercice 5 :** Pour chacune des suites ci-dessous :

- Calculer les quatre premiers termes de la suite puis conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

a) $(u_n)$ est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ , $u_{n+1}=4u_n-3n-2$ .

Correction Exercice 5a

b) $(u_n)$ est la suite définie par $u_0=4$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ , $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ .

Correction Exercice 5b

**Exercice 6 :** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=2$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}+3$ .
Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

Correction Exercice 6

**Exercice 7:** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=-3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ : $u_{n+1}=\frac{3u_n+10}{6+u_n}$ .

Démontrer que $(u_n)$ est croissante et majorée par 2.

Correction Exercice 7

**Exercice 8 :** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$ .

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ , $u_n \geqslant n$ .
2) Montrer par récurrence que pour tout $n$, $u_n=3^n+n-1$ .

Correction Exercice 8a

Correction Exercice 8b

**Corrections**

**Correction Exercice 1 :** $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{i=0}^{n} x^i$ ; On note $S_n$ cette somme

**Initialisation :** pour $n$ = 0

$S_0=1$ et $\dfrac{1-x^1}{1-x}=1$ donc la propriété est vraie au rang $n$ = 0.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $S_k=\dfrac{1-x^{k+1}}{1-x}$ et montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $S_{k+1}=\dfrac{1-x^{k+2}}{1-x}$

$S_{k+1}=S_k+x^{k+1}$ d'après la définition de la suite $S_n$

$=\dfrac{1-x^{k+1}}{1-x}+x^{k+1}$ d'après la propriété supposée vraie sur $u_k$ .

$=\dfrac{1-x^{k+2}}{1-x}$ après avoir réduit au même dénominateur

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

---

**Correction Exercice 2 : On note $S_n$ la somme $\sum_{q=1}^{n} q^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , $n\geqslant 1$**

**Initialisation :** pour $n$ = 1

$S_1=1$ et $\dfrac{1\times 2\times 3}{6}=1$ donc la propriété est vraie au rang $n$ = 1.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $S_k=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$ et montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$S_{k+1}=S_k+(k+1)^2$ d'après la définition de la suite $S_n$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+(k+1)^2$ d'après la propriété supposée vraie sur $u_k$ .

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ après avoir réduit au même dénominateur

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ , $\sum_{q=1}^{n} q^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

---

## Correction Exercice 3

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0=2$ et $3\times 2^n-1=3\times 2^0-1=3\times 1-1=2$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k=3\times 2^k-1$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}=3\times 2^{k+1}-1$.

$u_{k+1}=2\times u_k+1$ d'après la définition de la suite $(u_n)$

$= 2\times(3\times 2^k-1)+1$ d'après la propriété supposée vraie sur $u_k$.

$= 3\times 2^{k+1}-2+1$

La propriété est donc héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n=3\times 2^n-1$.

---

## Correction Exercice 4

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0=0$ et $2n^2-8n=2\times 0^2-8\times 0=0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k=2k^2-8k$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}=2(k+1)^2-8(k+1)$.

$u_{k+1}=u_k+4k-6$ d'après la définition de la suite $(u_n)$

$= 2k^2-8k+4k-6$ d'après la propriété supposée vraie sur $u_k$.

Or $2(k+1)^2-8(k+1)=2k^2+4k+2-8k-8=2k^2-4k-6$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n=2n^2-8n$.

---

## Correction Exercice 5a

$u_0=1$ ; $u_1=4u_0-3\times 0-2=2$ ; $u_2=4u_1-3\times 1-2=3$ **Conjecture :** $\boldsymbol{u_n=n+1}$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $u_n=n+1$.

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0=0$ et $n+1=0+1=1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k=k+1$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}=k+1+1=k+2$.

$u_{k+1}=4u_k-3k-2 = 4(k+1)-3k-2 = k+2$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n=n+1$.

## Correction Exercice 5b

$u_0=4=\sqrt{16}$ ; $u_1=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$ ; $u_2=\sqrt{1+17}=\sqrt{18}$. **Conjecture :** $\boldsymbol{u_n=\sqrt{16+n}}$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $u_n=\sqrt{16+n}$.

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0=4$ ; $\sqrt{16+0}=4$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k=\sqrt{16+k}$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}=\sqrt{16+(k+1)}=\sqrt{17+k}$.

$u_{k+1}=\sqrt{1+u_k^2}=\sqrt{1+(16+k)}=\sqrt{17+k}$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $u_n=\sqrt{16+n}$ .

---

## Correction Exercice 6

**Rappels**
► Pour démontrer, par récurrence, que la suite $(u_n)$ est croissante il faut démontrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}$ , $u_n\leqslant u_{n+1}$ .

► Dans le cas d'une suite définie par récurrence, l'utilisation de la fonction associée à la suite est fortement conseillée. Il faut donc, au préalable, étudier le sens de variation de cette fonction.
On rappelle que si $f$ est la fonction associée à la suite $(u_n)$ alors $u_{n+1}=f(u_n)$ .

*1ère étape : étude des variations de la fonction associée à la suite.*

$\boldsymbol{u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}+3}$ La fonction associée à cette suite définie par récurrence est $f : x\to \sqrt{x+2}+3$ .

$f$ est définie et dérivable sur [0 ; + ∞[ et ∀ $x$ ∈ [0 ; + ∞[, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ > 0 donc $f$ est croissante sur [0 ; + ∞[.

*2nde étape : démonstration de la croissance de la suite ($u_n$) par récurrence.*

**Initialisation :** pour $n$ = 0

$u_0=2$ et $u_1=\sqrt{u_0+2}+3=2+3=5$ On a bien $u_0\leqslant u_1$ donc la propriété est vraie au rang $n$ = 0.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k\leqslant u_{k+1}$ .

Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}\leqslant u_{k+2}$ .

$u_k\leqslant u_{k+1}$ **et** $f$ est croissante sur [0 ; + ∞[ donc $f(u_k)\leqslant f(u_{k+1})$ c'est à dire $u_{k+1}\leqslant u_{k+2}$ . donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)$ est croissante.

---

## Correction Exercice 7 : Démontrer que $(u_n)$ est croissante et majorée par 2, c'est prouver que $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$

*1ère étape : étude des variations de la fonction associée à la suite.*

La fonction associée à la suite est $f : x\to \dfrac{3x+10}{6+x}$ ; $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-6\}$ pour tout $x\geqslant 0$ .

et ∀ $x$ ∈ $\mathbb{R}\backslash\{-6\}$, $f'(x)=\dfrac{3\times(6+x)-1\times(3x+10)}{(6+x)^2}=\dfrac{8}{(6+x)^2}>0$ donc $f$ est croissante sur [0 ; +∞[.

*2nde étape : récurrence.*

**Initialisation :** pour $n$ = 0

$u_0=-3$ et $u_1=\dfrac{3\times(-3)+10}{6-3}=\dfrac{1}{3}$ On a bien $u_0\leqslant u_1\leqslant 2$ donc la propriété est vraie au rang $n$ = 0.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k\geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant 2$ .

Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1}\leqslant u_{k+2}\leqslant 2$ .

$u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant 2$ **et** $f$ croissante sur [0 ; + ∞[ donc $f(u_k)\leqslant f(u_{k+1})\leqslant f(2)<2$ car $f(2)=\dfrac{16}{9}<2$ donc

$u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{16}{9} \leqslant 2$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 2.

---

**Correction Exercice 8a :** Attention, ici la suite n'est pas définie par récurrence.

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0 = 0$ et $n = 0$ on a bien $u_0 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k \geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k \geqslant k$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire que $u_{k+1} \geqslant (k+1)$.

$u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3 \geqslant 3k - 2k + 3$ car $u_k \geqslant k$

$\Leftrightarrow$ $u_{k+1} \geqslant k + 3 \geqslant k + 1$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$,

**Correction Exercice 8b :**

**Initialisation :** pour $n = 0$

$u_0 = 0$ et $3^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k \geqslant 0$ tel que la propriété soit vraie c'est à dire tel que $u_k = 3^k + k - 1$.
Montrons que la propriété reste vraie au rang $k+1$ c'est à dire tel que $u_{k+1} = 3^{k+1} + (k+1) - 1 = 3^{k+1} + k$.

$u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3 = 3 \times (3^k + k - 1) - 2k + 3 = 3^{k+1} + 3k - 3 - 2k + 3 = 3^{k+1} + k.$ donc la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $\boldsymbol{u_n = 3^n + n - 1}$ **.**