Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

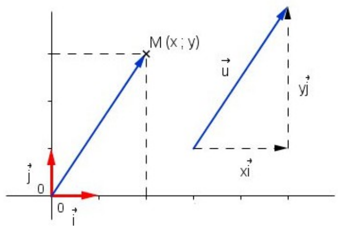
## 1. Norme d’un vecteur

**Propriété :**
La norme d’un vecteur est sa longueur.

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan alors

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$




***Exercice 1 : Calculer la norme d’un vecteur***

Soit A, B et C trois points du plan tels que $A(1;1)$ ; $B(4;3)$ et $C(6;0)$.

Placer les points, lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

## 2. Colinéarité de deux vecteurs

**Définition :** Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si, et seulement si, il existe un réel $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leurs cordonnées sont proportionnelles.

Remarque : deux vecteurs colinéaires ont la même direction *(ils sont portés par des droites parallèles).*

**Propriétés :** Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

***Exercice 2 : Étudier la colinéarité de deux vecteurs***

Dans un repère, on considère les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix} -4,2 \\ -7,4 \end{pmatrix}$ , $\vec{v}\begin{pmatrix} 10,5 \\ 18,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -8,4 \\ 16 \end{pmatrix}$.

**a)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? **b)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

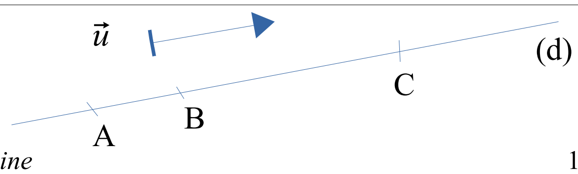
**Propriétés géométriques et colinéarité**

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

## 3. Vecteur directeur et équation d'une droite

**Définition - Propriétés**
Un vecteur est appelé vecteur directeur d'une droite lorsqu'il a la même direction que cette droite.
Une droite a une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.

**Exemples :** $\vec{u}$ , $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{CA}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (d).



**Propriétés - définitions** :
*Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées* a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où $m$ est le coefficient directeur de (d) et $p$ son ordonnée à l'origine.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

*Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées* a pour équation $x = k$ où $k$ est une constante.

Toute droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$. Une telle équation est appelée équation cartésienne de la droite (d).

Réciproquement, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels tels que $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une droite.
Un vecteur directeur de la droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Remarque : Contrairement aux équations réduites, les équations cartésiennes permettent de décrire la totalité des différentes droites du plan y compris celles qui sont verticales.

***Exercice 3 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite...***
***… connaissant un point et un vecteur directeur :*** Soit (d) la droite passant par $\mathrm{A}(-2;3)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de (d).

… ***connaissant deux points :*** Soit $\mathrm{A}(-1;3)$ et $\mathrm{B}(1;-1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

*Vidéo Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=zae5HtdJ3AM*

***Exercice 4 : Déterminer un vecteur directeur d'une droite***
Déterminer un vecteur directeur et le coefficient directeur (s'il existe) de chacune des droites suivantes :
$(d_1)$ : $2x - 3y + 4 = 0$  $(d_2)$ : $y = \frac{2}{3}x + 2$  $(d_3)$ : $-x + 3y - 6 = 0$  $(d_4)$ : $x = -1$.  $(d_5)$ $y = -1$

## 4. Vecteurs orthogonaux / Droites perpendiculaires

Vocabulaire : le mot perpendiculaire est spécifique aux droites sécantes donc dans le plan.
Le mot orthogonal s'applique à l'espace : généralisation de la perpendicularité. Il s'applique aussi aux vecteurs.

**Définition :** Deux vecteurs sont dits orthogonaux (on ne dit pas perpendiculaires) si et seulement si leurs directions sont orthogonales.

**Théorème** : Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \boldsymbol{xx' + yy'}$.  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

**Théorème :** Deux droites sont perpendiculaires si et seulement leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
En particulier : Deux droites d'équation réduite $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\boldsymbol{m \times m' = -1}$.

***Exercice 5 : Déterminer si les droites sont perpendiculaires***
a) $(d_1): 3x - 2y + 4 = 0$ et $(d_2): -x + 2y + 3 = 0$  b) $(d_1): y = 0{,}2x + 8$ et $(d_2): y = -5x + 2$
c) $(d_1): 10x + 4y - 3 = 0$ et $(d_2): -2x + 5y + 7 = 0$

**Exercice 1 :** Dans un repère, on donne les trois droites d'équations :

$(d_1): -2x-2{,}5y+3=0$ $\quad$ $(d_2): 4x+5y+6=0$ $\quad$ $(d_3): 5x-2y+3=0$ $\quad$ $(d_4): 10x-8y+5=0$

**a.** Démontrer que les droites ($d_1$) et ($d_2$) sont parallèles.

**b.** Démontrer que les droites ($d_2$) et ($d_3$) sont sécantes en un point I dont on donnera les coordonnées.

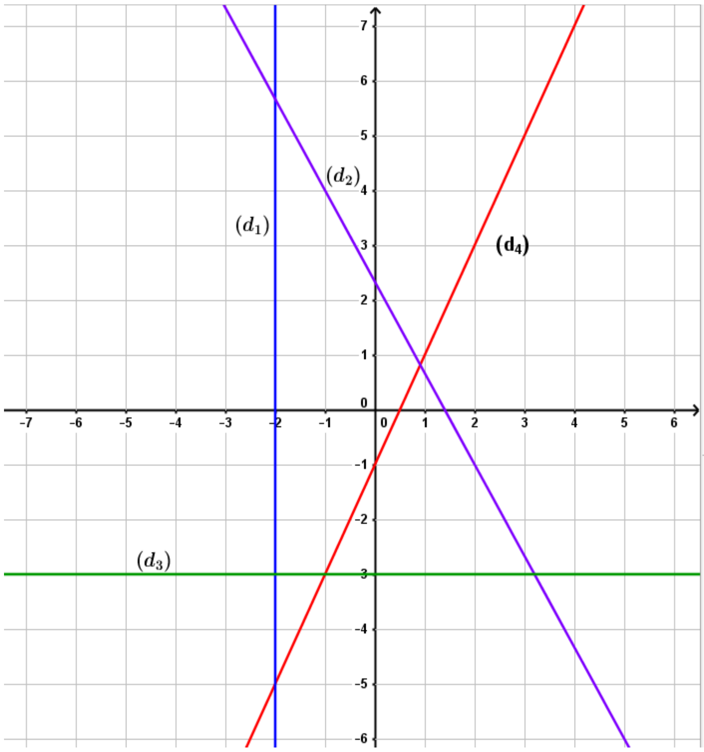
**c.** Démontrer que les droites (d[illegible]) et (d[illegible]) sont perpendiculaires.

**Exercice 2 : lecture graphique et tracé de droites**

On a tracé quatre droites dans le repère ci-contre :

$(d_2)$ passe par $(-1;4)$ et $(2;-1)$

$(d_4)$ passe par $(-1;-3)$ et $(2;3)$




**1. a)** Lire un vecteur directeur puis une équation cartésienne de chacune des quatre droites.

**b)** Le point de coordonnées $(1{,}5;2)$ appartient-il à la droite $(d_4)$ ?

**c)** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(d_2)$ avec les axes du repère.

**2a.** Tracer les droites d'équation :

$(d_5): 2x+7=0$ $\quad$ $(d_6): -x-2y-1=0$

$(d_7): 3x-2y-4=0$

**b)** Démontrer que les droites $(d_4)$ et $(d_6)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 3 :** On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$.

Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{P}$ perpendiculaires à la droite d'équation $y=-3x+2$ ?

**Exercice 4 :** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x+2$.

**1.** Déterminer les abscisses des points où $C_f$ possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**2.** Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=-3x+1$ et $\Delta$ la droite d'équation $y=\frac{x}{7}-4$.

**a.** Déterminer les abscisses où $C_f$ admet une tangente parallèle à $\mathscr{D}$.

**b.** Déterminer les abscisses où $C_f$ admet une tangente perpendiculaire à $\Delta$.

**Exercice 5 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormal. *a et b* sont deux réels non nuls et $b\neq a$.

Soit $T_a$ la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse *a* et $T_b$ la tangente au point d'abscisse *b*.

**1.** Démontrer qu'une équation de $T_a$ est : $y=2a\times x-a^2$.

**2.** Démontrer que $T_a$ est perpendiculaire à $T_b$ si et seulement si $b=-\frac{1}{4}a$.

**3.** Soient $T_a$ et $T_b$ deux tangentes perpendiculaires. On note I le point d'intersection de $T_a$ et $T_b$. Calculer les coordonnées de I en fonction de *a* uniquement.

**4.** Montrer que pour tout *a* non nul, I est sur une droite fixe particulière.