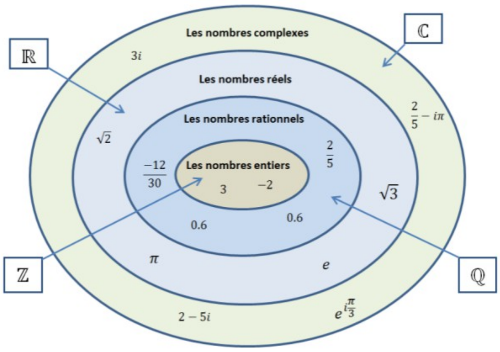
Les nombres complexes - Prérequis (1ère)



I -Forme algébrique d'un nombre complexe

Introduction : vidéo à consulter : https://youtu.be/2GwSUDm_Rg8

- *i* n'est pas un nombre réel (il n'est pas sur la droite des réel).

  On l'appelle nombre imaginaire.

a. Définitions et vocabulaire

Théorème (admis) et définition : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

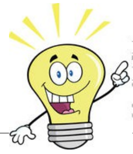
(1) $\mathbb{C}$ contient un nombre noté **i** tel que $\boldsymbol{i^2=-1}$.

(2) Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière **unique** $\boldsymbol{z=a+ib}$ avec *a* et *b* réels.

Vocabulaire : L'écriture $\boldsymbol{z=a+ib}$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe *z*

a est la **partie réelle** de *z* : elle est notée **Re(z)**.

b est la **partie imaginaire** de *z* : elle est notée **Im(z)**.



(3) Le conjugué du nombre complexe $z=a+ib$ est le nombre $\overline{z}=a-ib$

***Exemple 1* :** Donner la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

- $z=-4+5i$ on a $z\in\mathbb{C}$; $z\notin\mathbb{R}$; $\Re e(z)=-4$ et $\Im m(z)=5$
- $z=\sqrt{3}$ on a $z\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{R}$; $\Re e(z)=\sqrt{3}$ et $\Im m(z)=0$
- $z=-3i$ on a $z\in\mathbb{C}$ **;** $z\notin\mathbb{R}$ **;** $\Re e(z)=0$ **et** $\Im m(z)=-3$

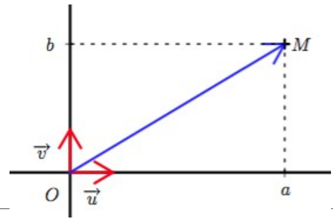
Donner le conjugué des complexes suivants :

- Si $z=2-5i$, alors $\overline{z}=2+5i$ Si $z=-4-i$, alors $\overline{z}=-4+i$
- Si $z=-5$, alors $\overline{z}=-5$ Si $z=3i$, alors $\overline{z}=-3i$

b. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définition : dans un repère orthogonal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on représente le nombre complexe $z=a+ib$ par :

- Le point $M(a;b)$ - Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$



Vocabulaire : le plan est alors appelée plan complexe. L'axe des abscisses est appelé axe des réels et l'axe des ordonnées axe des imaginaires purs.

Le nombre complexe z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

c. Opérations dans $\mathbb{C}$

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

On utilise $\boldsymbol{i^2=-1}$.

Exemple 2 : soit $z=-3+2i$ et $z'=8-i$. Donner la forme algébrique de $z+z'$; zz' ; $2z$

$z+z'=-3+2i+8-i=5+i$

$zz'=(-3+2i)(8-i)=-24+3i+16i-2i^2=-24+19i+2=-22+19i$

$2z=2(-3+2i)=-6+4i$

Propriété : Si $z=a+ib$ alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$

Exemple 3 : soit $z=-3+2i$. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{-3+2i}=\frac{-3-2i}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-3-2i}{9-4i^2}=\frac{-3-2i}{9+4}=\frac{-3-2i}{13} \qquad \text{On a } \frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

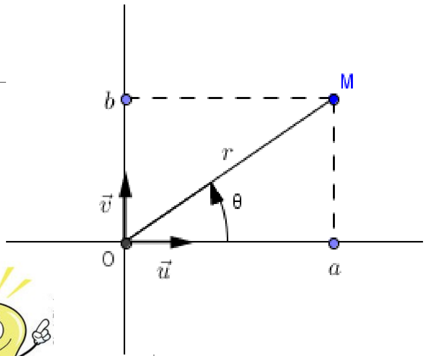
Exemple 4 : soit $z=-3+2i$ *et* $z'=8-i$. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.

$$\frac{z}{z'}=\frac{-3+2i}{8-i}=\frac{(-3+2i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}\ldots=\frac{-26+19i}{65}\ .$$

SF 3 et 4 page 223 - Exercices 20 à 31 page 233

II - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a. Module et argument d'un nombre complexe



Définitions :

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe et M le point d'affixe z.

Le module de z, noté |z| est la distance OM,

c'est à dire le nombre réel $\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Un argument du complexe non nul z, noté arg(z),
est une mesure **en radian** de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

On a $\cos(\theta)=\frac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta)=\frac{b}{|z|}$

Tout nombre complexe z peut s'écrire $z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$
C'est la forme trigonométrique de z.

Exemple 5 : Déterminer le module et un argument de $z=-1+\mathrm{i}$ puis sa forme trigonométrique

$z=-1+\mathrm{i}$, alors $|z|=|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc un argument de z est $\frac{3\pi}{4}$

La forme trigonométrique de z est $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Propriétés

$|z|=0\Leftrightarrow z=0 \qquad |-z|=|z|=|\overline{z}|$

$|z\times z'|=|z|\times|z'|$ et $\arg(z z')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

$|z^n|=|z|^n$ et $\arg(z^n)=n\arg(z)$

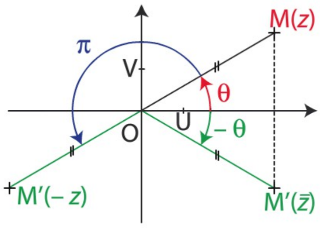
SF 5 et 6 page 225 ; Exercices 32 à 45 page 234

b. Propriétés des modules et arguments

Propriétés : Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

(1) $|\bar{z}|=|z|$ et $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$

(2) $|-z|=|z|$ et $\arg(-z)=\arg(z)+\pi\ [2\pi]$



Propriétés : Pour tous nombres complexes z ≠ 0 et z' ≠ 0 et tout entier naturel *n,* on a :

(1) Produit : $|z\times z'|=|z||z'|$ et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$

(2) Puissance : $|z^n|=|z|^n$ et $\arg(z^n)=n\times\arg(z)\ [2\pi]$

(3) Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$

(4) Quotient : $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)\ [2\pi]$

Exemple 1 : soit z et z' deux complexes définis par $\begin{cases}|z|=3\\ arg\ z=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ et $\begin{cases}|z'|=5\\ arg\ z'=\frac{-\pi}{3}\end{cases}$.

a) Donner la forme trigonométrique de $z\times z'$

$|z\times z'|=|z||z'|=3\times5=15$ et $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

On a donc $zz'=15\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

b) Donner la forme trigonométrique de z^2 puis sa forme algébrique

$|z^n|=|z|^n$ donc $|z^2|=|z|^2=3^2=9$ et $\arg(z^n)=n\times\arg(z)$ donc $\arg(z^2)=2\times\arg(z)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On a donc $z^2=9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=9i$

c) Donner la forme trigonométrique de $\frac{z}{z'}$

$\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z|}{|z'|}=\frac{3}{5}$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

On a donc $\frac{z}{z'}=\frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

Exemple 2 : soit $z=(1+i)^8$ déterminer $|z|$ et $\arg(z)$

$|z|=|(1+i)^8|=|1+i|^8=(\sqrt{2})^8=16$ et $\arg(z)=\arg((1+i)^8)=8\arg(1+i)=8\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

SF6 page 225 ; exercices 46 à 56 page 235