Les nombres complexes (IV)
Forme exponentielle d'un nombre complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

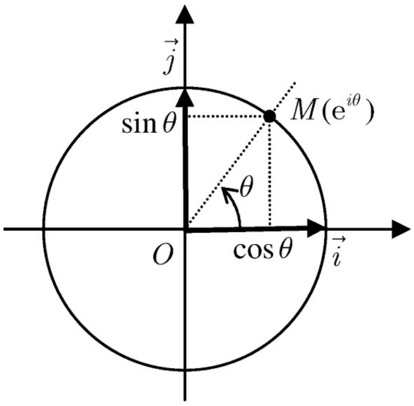
Compétences	*Exercices corrigés*
Utiliser la notation exponentielle	*Savoir-faire 10 page 209 ;142 page 217*

Définition - Vocabulaire

Définition : pour tout réel θ on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Par conséquent, tout complexe $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ peut s'écrire sous la forme $re^{i\theta}$ où *r* est le module de z et θ un argument de z.

$re^{i\theta}$ est la forme exponentielle du complexe z de module *r* et d'argument θ .



Exemple 1 : Déterminer le nombre complexe défini par $e^{i\pi}$

Par définition $r = |z| = 1$ et $\theta = \pi\ [2\pi]$ donc $z = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

Euler (1707 - 1783), mathématicien suisse.

L'identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$ ou encore $e^{i\pi} = -1$

https://www.youtube.com/watch?v=zApx1UlkpNs

Une vidéo de 5 minutes sans paroles (mais fond musical) pour découvrir l'identité d'Euler.

Euler's identity is said to be the most beautiful theorem in mathematics.

Exemple 2 : Déterminer la forme exponentielle de $z = 3 + 3i$

$|z| = 3\sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ donc la forme exponentielle de $z = 3 + 3i$ est $3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ex 32 ; 35 p 211

La forme exponentielle d'un complexe est particulièrement bien adaptée pour calculer des produits ou des quotients de complexes.

Les propriétés vues pour la forme trigonométrique peuvent être énoncées :

Propriétés : θ et θ' sont deux réels, *n* est un entier naturel.

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$: formule de Moivre

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \text{ et } \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

Preuves

Ex 33 ; 34 p 211 ; 138 à 148 p 217 ; 162 p 218

Vous pouvez désormais prouver les égalités ci-dessous :

2°) *Formules d'EULER :* $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

3°) *Formules trigonométriques :* Pour tous réels a et b, on a :

Formules d'addition :

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

b) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Formules de duplication :

c) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

d) $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=vrSeWkVRfww

Différentes formes d'un nombre complexe pour réviser l'ensemble du chapitre :
http://homeomath2.imingo.net/interactif256.htm *(Brouillon indispensable).*