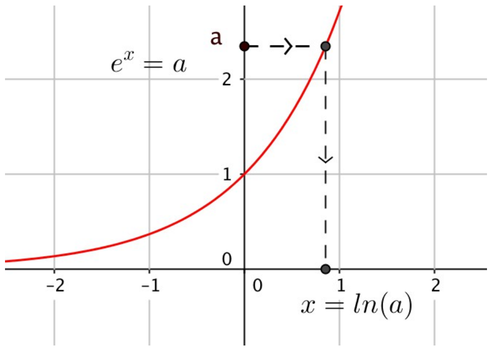
Fonctions (III)
Logarithme népérien

Compétences	*Exercices corrigés*
Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	*Savoir-faire 2 p 137*
Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture	*Savoir-faire 3 et 4 p 139 ; 4p 139*
Savoir résoudre des équations ou inéquations avec ln Savoir résoudre des équations du type $a^n = b$, $a > 0$ et $b > 0$	*Savoir-faire 1 p 137 ; 48 p 146* *Application 1 et 2*
Connaître et exploiter les limites liées à la fonction ln	*Savoir-faire 5 et 6 p141*
Savoir étudier une fonction de la forme $\ln(u)$	*Savoir-faire 7 p 143 ; 96 p 150*

I - La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans]0 ; + ∞[.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel *a* de $]0;+\infty[$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, on la note $\ln(a)$.



Définition : On appelle **logarithme népérien d'un réel strictement positif *a***, l'unique solution de l'équation $e^x = a$ que l'on note **ln *a***.

La **fonction ln** est définie sur $]0;+\infty[$. Elle associe à tout réel *x* strictement positif le nombre *y*, noté $\ln(x)$, dont l'exponentielle est *x*.

Conséquences

1. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ par définition.

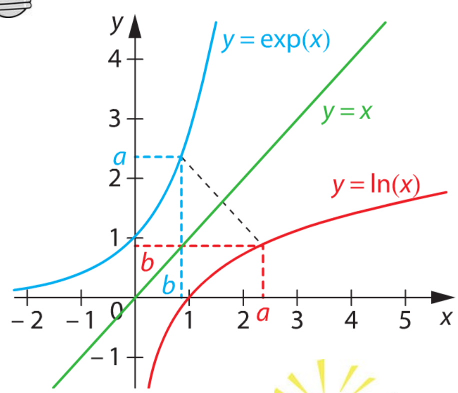
2. Pour tout *x*, $\ln(e^x) = x$

3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Théorème : Pour tout réel *a* strictement positif et pour tout nombre *b*, $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$

Preuve : Si $\ln(a) = b$ alors $e^{\ln a} = e^b = a$.

Réciproquement, si $a = e^b$ alors $\ln(a) = \ln(e^b) = b$

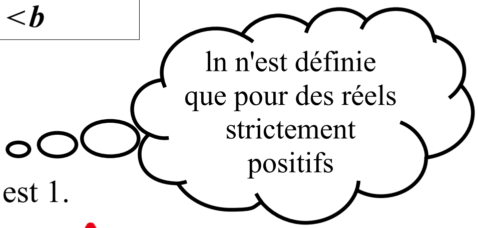


Conséquences : les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

Théorème : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur]0;+∞[.

Preuve : Soient *u* et *v* deux réels strictement positifs tels que $u < v$. Or $u < v$ s'écrit $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$.
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc nécessairement $\ln(u) < \ln(v)$.

Conséquences : Pour tous réels a et b strictement positifs : $\mathbf{\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b}$
et $\mathbf{\ln(a)<\ln(b) \Leftrightarrow a<b}$



Exemple : Résoudre l'équation $\ln(x-1)=0$

Cette équation n'a de sens que pour $x-1>0$ c'est-à-dire pour $x>1$

$\forall x>1$, $\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=\ln(1)$ car l'antécédent de 0 par ln est 1.

$\forall x>1$, $\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

L'équation admet une unique solution $x=2$.

<u>**Exercice :**</u> **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x-3)=\ln(9-x)$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(3-x)<\ln(x+1)$.

Ex 6 à 9 p 144 - 14 ; 15 p 144 - 39 à 47 p 146 - 69 à 74 p 148

II - Propriété de la fonction logarithme népérien

Introduction **:** extrait du manuel *Transmaths* (édition 2012)
Construction d'une table de logarithme, approche des propriétés de ln

1. Relation fondamentale dite aussi relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\mathbf{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}$
Autrement dit, la fonction ln transforme les produits en somme. *Preuve*

Exemple : Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x+\ln(2+e^{-3x})$.

Montrer que $f(x)=\ln(2e^{x}+e^{-2x})$

2. Conséquences de la propriété fondamentale

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :
$\mathbf{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$ et $\mathbf{\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)}$ *Preuve*

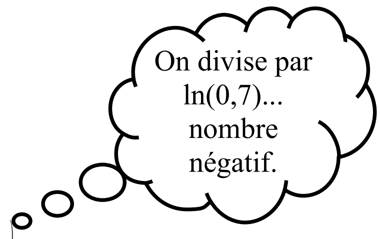
Théorème : Pour tous réels a et b strictement positif et tout entier relatif n, on a : $\mathbf{\ln(a^{n})=n\times\ln(a)}$
Pour tout réel a strictement positif, $\mathbf{\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\times\ln(a)}$ *Preuves*

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positif et tout entier relatif n, on a : $\mathbf{\ln(a^{n})=n\times\ln(a)}$
Preuve par récurrence (manuel page 138).

Théorème : Pour tout réel a strictement positif, $\mathbf{\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\times\ln(a)}$ *Preuve*

Exemples : a) Exprimer $\ln(4^{-3})+5\ln(2)$ en fonction de $\ln(2)$.

b) Exprimer $\ln(\sqrt{3})+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ en fonction de $\ln(5)$.



Application 1 : Déterminer le plus petit entier n tel que $0,7^{n}\leqslant 10^{-2}$.

$0,7^{n}\leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow \ln(0,7^{n})\leqslant\ln(0,01) \Leftrightarrow n\times\ln(0,7)\leqslant\ln(0,01) \Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}$

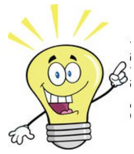
© $n\geq 12{,}9$ donc $n=13$

Application 2 : Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de 0,2. Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Ex 20 à 27 p 145 - 65 et 66 p 147

III - Étude de la fonction logarithme népérien

1. Continuité et dérivabilité



Théorème (admis) : La fonction logarithme népérien est continue sur]0;+∞[.

Théorème : La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0;+∞[et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

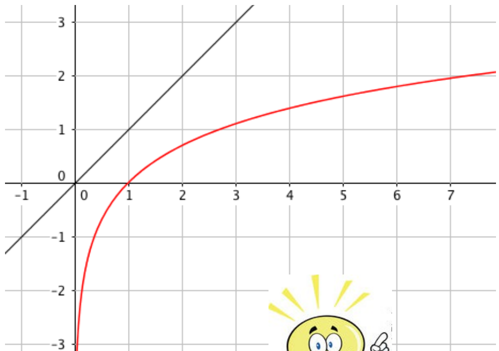
Preuve (manuel page 136)

Exercice 1 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Exercice 2 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

Ex 16 à 19 p 145 ; 55 à 64 p 147

2. Limites aux bornes et courbe représentative de la fonction ln



Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0, x > 0} \ln(x) = -\infty$

Preuves page 140

La fonction $x \to \ln(x)$ est strictement croissante sur]0;+∞[.

3. Limites à connaître

Théorème (*Preuves page 140)*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exercice **:** Déterminer les limites **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x))$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Exercice **:** Soit la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = (\ln(x))^3 - 3\ln(x)$.

a. Déterminer les limites aux bornes de son intervalle de définition. Que peut on en déduire ?

b. Montrer que $f'(x) = \frac{3(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)}{x}$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

c. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.

d. Résoudre $f(x) = 0$ puis construire C_f et T dans un repère.

Ex28 à 34 p 145 - 81 à 90 p 149

NEPER (ou NAPIER) John, écossais, 1550-1617

Baron de Merchiston, théologien protestant. Avec l'invention de ses "réglettes", permettant d'effectuer les quatre opérations élémentaires, il est à l'origine des premières machines à calculer dont il expose le fonctionnement dans un traité (*Rabdologiae*, 1617) en introduisant, au niveau des notations, la notation décimale actuelle des nombres décimaux, au détriment de la notation fractionnaire :

32,578 plutôt que $32\frac{578}{1000}$

→ Le traité de Neper eut pour nom précis *Rabdologiae seu numerationis per virgula libri duo* signifiant *Deux livres sur la rabdologie* (du grec *rhabdos* = *baguette*, *réglette* et *logos* = (science du) *calcul*) *et sur la numération avec virgule*.

IV. Fonctions de la forme ln(u)

Théorème : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\boldsymbol{x \to \ln(u(x))}$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x \to \dfrac{\boldsymbol{u'(x)}}{\boldsymbol{u(x)}}$.

Exemple : Soit la fonction *f* définie sur $]0;2[$ par $f(x)=\ln(2x-x^2)$. Déterminer $f'(x)$.

$$u(x)=2x-x^2 \text{ et } u'(x)=2-2x \text{ d'où } f'(x)=\frac{2-2x}{2x-x^2}.$$

Théorème : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions $\boldsymbol{x \to u(x)}$ et $\boldsymbol{x \to \ln(u(x))}$ ont le même sens de variation. *Preuve*

Exemple : On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

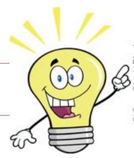
Ex 35 à 38 p 145 - 91 à 95 p 149 - 97 p 150

V. Logarithme décimal

Merveilleux logarithmes de Mickaël Launay : ***https://www.youtube.com/watch?v=rWfl7Pw8YVE***

Définition : on appelle fonction logarithme décimal la fonction notée **log** définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$



Propriétés : $\log(10)=1$ $\quad \log(1)=0$ $\quad \log(10^n)=n$

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs, on a :

$$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b) \ ; \ \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b) \text{ et } \log(a^n)=n\times\log(a)$$

Application 3 : échelle logarithmique (voir activité)

Application 4 : Savoir-faire 8 page 143 ; 98 p 150

Le logarithme népérien, également dit naturel, voire hyperbolique depuis Euler, autrefois noté Log, est noté aujourd'hui ln.

Il vérifie pour tout $x>0$, $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$: l'aire sous la courbe de l'hyperbole de 1 à *e* vaut... 1 !

Le nombre *e* dit nombre d'Euler est un nombre réel tel que *e* =2, 7182818284 5904523536....

e est irrationnel, transcendent et $\mathrm{e}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Un peu d'histoire des maths :
- sur le site d'Yvan Monka : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-e
- sur un site québécois : http://www.math.uqam.ca/~boileau/Explorations2010/Nombre_e/siteHistoire.html
- Sur Chronomaths : http://serge.mehl.free.fr/chrono/Neper.html pour en savoir plus sur Neper