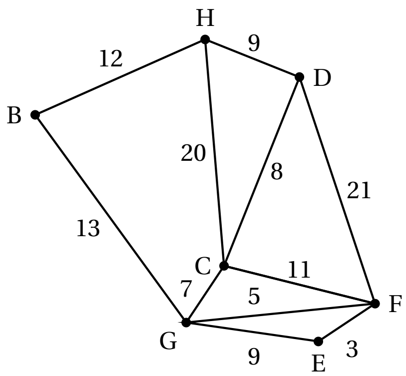
Graphes pondérés et algorithme de Dijkstra

Exercice 1. Antilles juin 2016 (c)

Des touristes sont logés dans un hôtel H.
Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.
Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.
Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1.

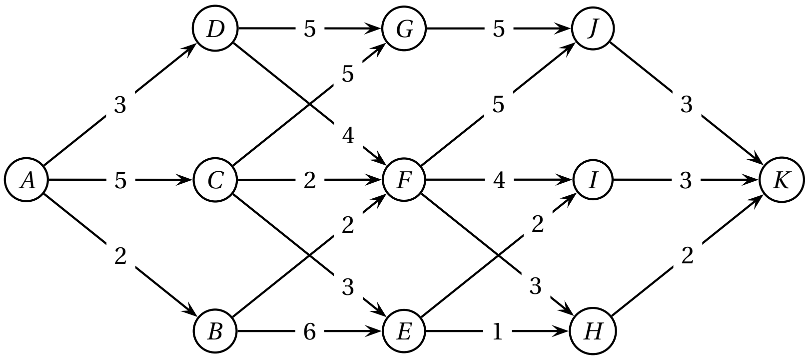
1. a. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.

1. b. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.

2. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.

Exercice 2. Asie 2016 - partie 3 (c)

On oriente et on pondère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

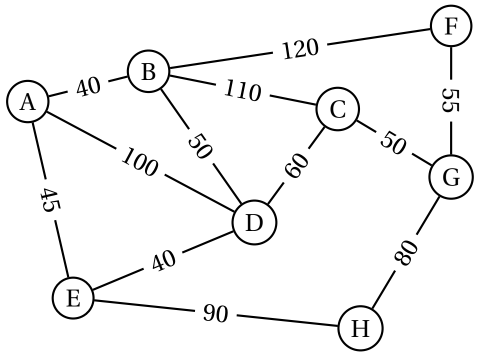
Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.

Exercice 3. Centres étrangers 2016

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.
Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.
Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

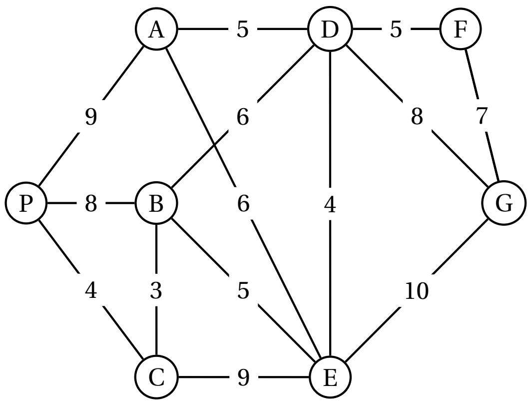
- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.

Les arêtes sont pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros.
Un voyageur partant de l'aéroport A doit se rendre à l'aéroport G.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet le moins cher.



Exercice 4. Polynésie Septembre 2015 (c)

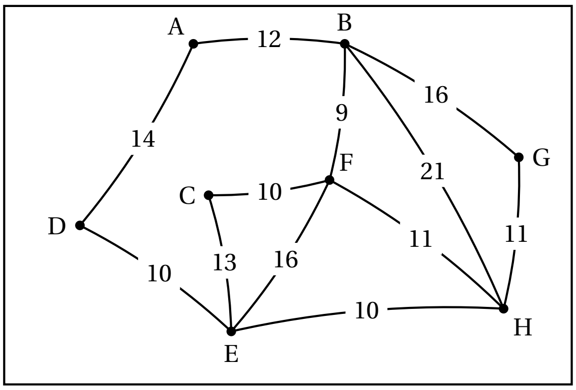
Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

Exercice 5. Métropole 2015 (Partie 3)

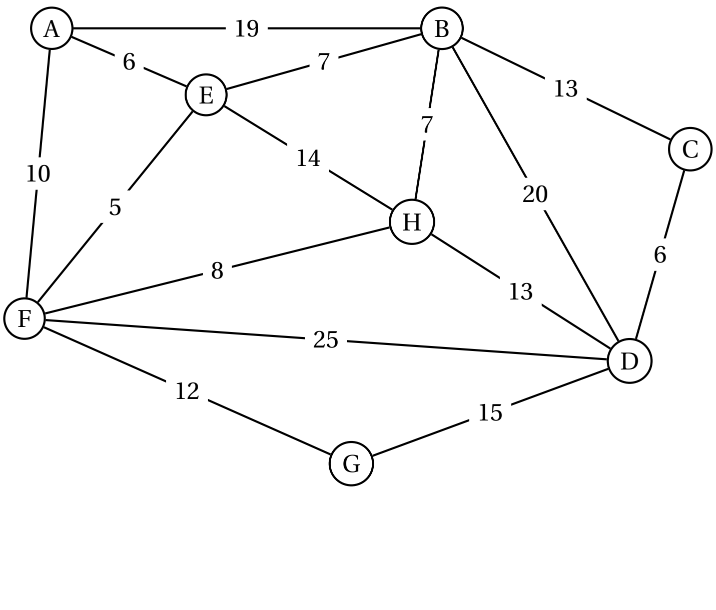
Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathscr{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.
Le graphe $\mathscr{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

Exercice 6. Asie 2015 (Partie 3)

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.
Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.

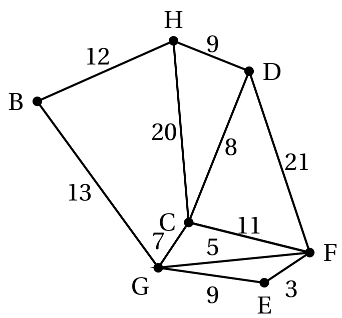


Correction

Correction Graphes pondérés et algorithme de Dijkstra

Correction de l'exercice 1 : Antilles 2016

Des touristes sont logés dans un hôtel H. Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme. Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. **1. a. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.**
Rechercher un chemin qui part d'un sommet, qui passe par toutes les arêtes une seule fois et qui revient au sommet de départ, c'est chercher un cycle eulérien dans le graphe. D'après le théorème d'EULER, un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degrés pairs.
   - Le graphe est connexe car la chaîne BGEFCDH par exemple contient tous les sommets du graphe (non orienté).
   - On cherche les degrés des sommets :

Sommets	H	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	2	4	3	2	4	4

   Il y a deux sommets de degrés impairs, donc il n'y a pas de cycle eulérien dans ce graphe.
   - Conclusion : le guide ne peut pas emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant.

1. b. Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.
Le guide souhaite partir de l'hôtel et parcourir tous les tronçons de route sans forcément revenir à l'hôtel ; il s'agit alors de trouver une chaîne eulérienne dans ce graphe.

D'après le théorème d'EULER, un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si exactement zéro ou deux de ses sommets sont de degrés impairs. C'est le cas ici car pour ce graphe connexe, seuls les sommets H et D sont de degrés impairs ; on peut donc trouver un parcours partant de H et arrivant à D passant une et une seule fois par chaque tronçon de route.

Voici un tel parcours :

$$H - B - G - C - H - D - C - F - G - E - F - D$$

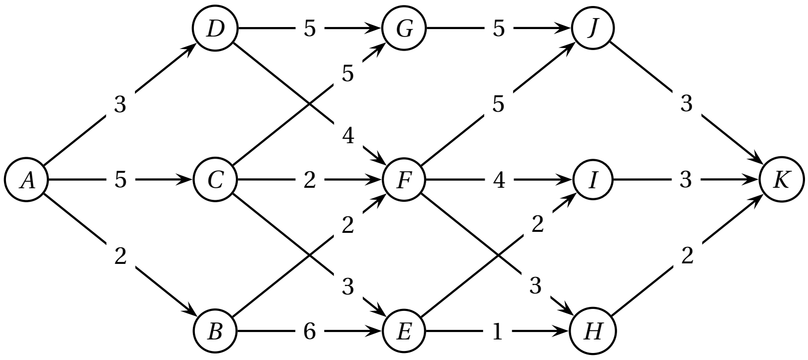
2. **Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse.**
On va déterminer le chemin le plus court reliant H à E en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

Départ	B	C	D	E	F	G	On garde
H	12 H	20 H	9 H	∞	∞	∞	D (H)
D(9)	12 H	~~20 H~~ 17 D		∞	30 D	∞	B (H)
B(12)		17 D		∞	30 D	25 B	C (D)
C(17)				∞	~~30 D~~ 28 C	~~25 B~~ 24 C	G (C)
G(24)				33 G	28 C		F (C)
F(28)				~~33 G~~ 31 F			E (F)

Le chemin de longueur minimale 31 km entre H et E est : $H \xrightarrow{9} D \xrightarrow{8} C \xrightarrow{11} F \xrightarrow{3} E$

Correction de l'exercice 2 : Asie 2016

On oriente et on pondère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation et les flèches, le sens du ruissellement.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

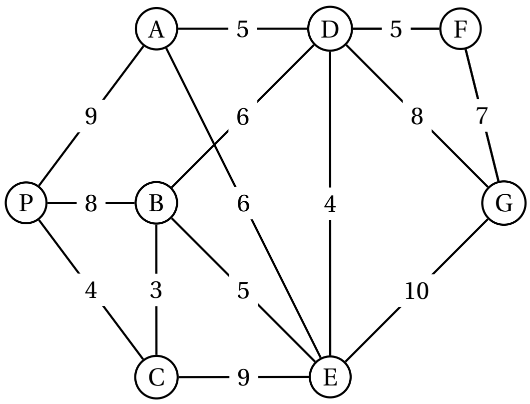
Pour déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K, on utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	2 A	5 A	3 A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B (A)
		5 A	3 A	8 B	4 B	∞	∞	∞	∞	∞	D (A)
		5 A		8 B	4 B ~~7 D~~	8 D	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	F (B)
		5 A		8 B		8 D	7 F	8 F	9 F	∞	C (A)
				8 B ~~8 C~~		8 D ~~10 C~~	7 F	8 F	9 F	∞	H (F)
				8 B		8 D		8 F	9 F	9 H	E (B)
						8 D		8 F ~~10 E~~	9 F	9 H	G (D)
								8 F	9 F ~~13 G~~	9 H	I (F)
									9 F	9 H ~~11 I~~	J (F)
										9 H ~~11 J~~	K (H)

Le chemin de longueur minimale 9 km entre A et K est : A $\xrightarrow{2}$ B $\xrightarrow{2}$ F $\xrightarrow{3}$ H $\xrightarrow{2}$ K

Correction de l'exercice 4 : Polynésie Septembre 2015

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. **Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?**
Sur ce graphe, c'est assez facile de trouver un itinéraire reliant le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites :

P – B – C – E – A – D – F – G

<u>Note du correcteur</u>

Rechercher dans un graphe un trajet qui passe une et une seule fois par tous les sommets, c'est chercher un chemin hamiltonien ; cette notion n'est pas au programme de la spécialité en ES mais dans le graphe proposé ici, il n'y avait guère de difficulté pour répondre à la question.

Il n'existe pas – à ma connaissance – de condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin hamiltonien.

2. **Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?**
On cherche un chemin qui emprunte une et une seule fois toutes les voies et qui relie P à G, autrement dit un chemin eulérien.
Or, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne dans un graphe connexe si et seulement si exactement zéro ou deux de ses sommets sont de degrés impairs.
   - Le graphe est connexe car il existe une chaîne qui contient tous les sommets du graphe, par exemple la chaîne $A - P - B - C - E - D - F - G$.
   - Tous les sommets de ce graphe sont de degrés impairs sauf F, donc il n'existe aucun itinéraire qui emprunte une et une seule fois toutes les voies.

3. On va déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G au moyen de l'algorithme de Dijkstra :

P	A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	P
	9 P	8 P	4 C	∞	∞	∞	∞	C
	9 P	~~8 P~~ 7 C		∞	13 C	∞	∞	B
	9 P			13 B	13 C	∞	∞	A
				13 B ~~14 A~~	13 C ~~15 A~~	∞	∞	D
					13 C	18 D	21 D	E
						18 D	21 D ~~23 E~~	F
							21 D ~~25 F~~	G

Le chemin le plus rapide de P vers G est d'une durée de 21 minutes :

$$P \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{6} D \xrightarrow{8} G$$