## *Géométrie dans l'espace (II)* — *Les vecteurs de l'espace*
## *Représentation paramétrique d'une droite*

| Compétences | *Exercices corrigés* |
|---|---|
| Démontrer un alignement, un parallélisme avec le calcul vectoriel | *7 et 9 page 239* |
| Montrer que des vecteurs ou des points sont coplanaires | *8 page 239 ; 11 page 241; 85 page 249* |
| Démontrer un alignement, un parallélisme avec des coordonnées | *10 page 241* |
| Déterminer et utiliser une décomposition de vecteurs | *12 page 241* |
| Utiliser la représentation paramétrique d'une droite, d'un plan | *13 et 14 page 243 ; 121 page 252* |

# I - Les vecteurs dans l'espace

## a) Notion de vecteur de l'espace

*Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace.*

**Définition** : À tout couple de points distincts (A,B) de l'espace, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par :
- sa direction, celle de la droite (AB);
- son sens, celui de A vers B;
- sa norme, égale à la distance AB.

**Théorème (admis) :** $\vec{u}$ est un vecteur et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ .

**Règle du parallélogramme** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs représentants respectifs de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ représentant $\overrightarrow{AD}$ ;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.

**Relation de Chasles :** quels que soient les points A, B, et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Colinéarité :** La colinéarité est importante en géométrie. Elle sert à démontrer que deux droites sont parallèles ou que des points sont alignés.

- Deux vecteurs non nul $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{v}$ .
- Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.
- Les points **A, B et C sont alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires.**

## b) Caractérisation vectorielle d'une droite

**Propriétés**

Soit A et B deux points distincts.

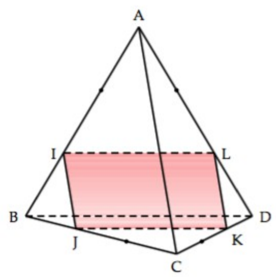
Un point **M appartient à (AB)** si et seulement si il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ .

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et D' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ .
D et D' sont **parallèles** si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont colinéaires.**

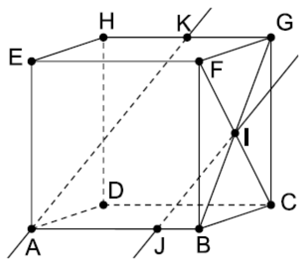
**Exercice 1 :** ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L sont définis par :

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ; $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ ; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ .

Montrer que IJKL est un parallélogramme.



**Exercice 2 :** ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.



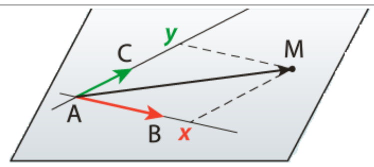

I est le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et J le point tel que $\vec{BJ}=\frac{1}{4}\vec{BA}$ .

**1.** Démontrer que $\vec{AK}=2\vec{JI}$ .

**2.** Que peut-on en déduire pour les droites (AK) et (IJ) ?

## c) Caractérisation vectorielle d'un plan

**Propriétés :** Soit trois points A, B et C non alignés de l'espace.
Le point M appartient au plan (ABC) si, et seulement si, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\boldsymbol{\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}}$ .
On dit que $\boldsymbol{\vec{AB}}$ et $\boldsymbol{\vec{AC}}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) ou que le plan (ABC) est dirigé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ .




*(voir animation GeoGebra)*

**Exercice 3 :** ABCD est un tétraèdre. le point M est défini par la relation $\vec{AM}=3\vec{BM}+\vec{CM}$
Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

*Méthode* : Les points A, B et C ne sont pas alignés donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Montrons qu'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\boldsymbol{\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}}$ .

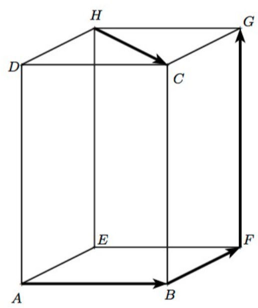
$$\vec{AM}=3\vec{BM}+\vec{CM} \Leftrightarrow \vec{AM}=3\vec{BA}+3\vec{AM}+\vec{CA}+\vec{AM} \Leftrightarrow 3\vec{AM}=3\vec{AB}+\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AM}=\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AC}$$

On a donc montré qu'il existe deux réels $x=1$ et $y=\frac{1}{3}$ tels que $\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$ donc $M\in(ABC)$ .

## d) Vecteurs coplanaires

**Définition :** Les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'ils peuvent être contenus dans un même plan.

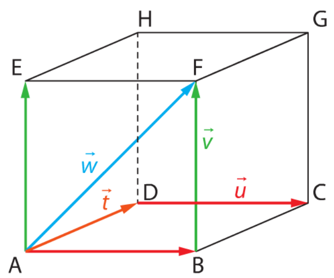
Autrement dit : soit $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ , $\vec{v}=\vec{AC}$ et $\vec{w}=\vec{AD}$ .
$\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points A, B, C et D appartiennent au même plan (A, B, C et D sont dits coplanaires).




*Exemple 1* : Les vecteurs $\vec{AB}$ , $\vec{BF}$ et $\vec{HC}$ sont coplanaires :
$\vec{HC}=\vec{EB}$ , les points A, B, F, E sont coplanaires.

Les vecteurs $\vec{AB}$ , $\vec{BF}$ et $\vec{FG}$ ne sont pas coplanaires :
Les points A, B, F et G ne sont pas coplanaires.

*Exemple 2* : Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous :




- Les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires car $\vec{u}=\vec{AB}$ , $\vec{v}=\vec{AE}$ , $\vec{w}=\vec{AF}$ et A, B, E et F sont dans le plan (ABE) donc coplanaires.
- Les vecteurs $\vec{u}$ , $\vec{v}$ et $\vec{t}$ ne sont pas coplanaires car $\vec{u}=\vec{AB}$ , $\vec{v}=\vec{AE}$ , $\vec{t}=\vec{AD}$ et les points A, B, E et D ne sont pas coplanaires.
- $\vec{AB}$ et $\vec{CG}$ sont coplanaires puisque $\vec{CG}=\vec{AE}$ et A, B, E sont dans le plan (ABE), **cependant les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires !!!**

**Propriétés :** Les vecteurs $\boldsymbol{\vec{u}}$ , $\boldsymbol{\vec{v}}$ et $\boldsymbol{\vec{w}}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

On dit que le couple ( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) forme une base du plan et que les réels $x$ et $y$ sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette base. Il est essentiel de comprendre cette notion : trois vecteurs de l'espace non coplanaires forment une base de l'espace. La décomposition de tous les vecteurs de l'espace dans cette base est unique.

## II - Repérage dans l'espace

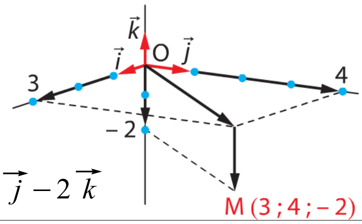
Un repère de l'espace est la donnée d'un point O et de trois vecteurs ( $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) non coplanaires.
On note (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) un tel repère, O est l'origine du repère.

**Propriétés et définition :** soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) un repère de l'espace.

- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (*x, y, z*) tel que $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ .
- (*x, y, z*) sont les coordonnées de M dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ).
  *x* est l'abscisse de M, *y* l'ordonnée et *z* est la *cote* de M.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (*x, y, z*) tel que $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ .
- (*x, y, z*) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ).

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x;y;z)$

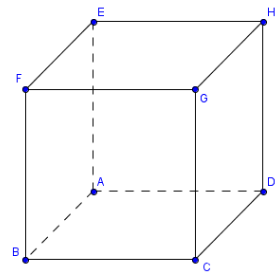



*Exemple :* $\vec{u}=3\,\vec{i}+4\,\vec{j}-2\,\vec{k}$

**Exercice 4 :** Soit $\vec{u}(-2;3;1)$ , $\vec{v}(1;0;3)$ et $\vec{w}(1;2;-1)$ . Le triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ définit-il une base de l'espace ?

**Exercice 5 :** Dans un cube ABCDEFGH, on construit les points M et N définis par : $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{EN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$ .

**1.** a) Décomposer les vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ .
b) En déduire que les points A, M et N sont alignés.
c) Justifier que les points A, C, M et N sont coplanaires.




**2.** On muni ce cube du repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ .

On considère les points R et P définis par $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}$ .

J est le milieu du segment [BC].
a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RC}$ ; $\overrightarrow{RJ}$ et $\overrightarrow{RP}$ .
b) En déduire que les points R, J et P et C ne sont pas coplanaires.

Un autre exemple en vidéo (Mathrix) : https://www.youtube.com/watch?v=4a9wpRE4QqE&t=10s

**Propriétés** : soit (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) un repère de l'espace, $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs et $k$ un réel.

$\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y',z+z')$ et $k\,\vec{u}(kx,ky,kz)$

Soit $\boldsymbol{A(x_A;y_A;z_A)}$ et $\boldsymbol{B(x_B;y_B;z_B)}$ deux points de l'espace.

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ I milieu de [AB a pour coordonnées $\boldsymbol{\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)}$

Si le repère est orthonormé, on a $\boldsymbol{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$

*Preuves page 240*

**Exercice 6 :** Soit les points $A(3;2;1)$ , $B(10;6;-1)$, $C(9;8;-9)$ et $D(2;4;-7)$ .

a) Démontrer que ces points sont coplanaires.
b) Montrer que ABCD est un losange.

## III - Représentation paramétrique d'une droite

**Propriétés :**

Dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) de l'espace, on considère un point $A(x_A;y_A;z_A)$ , un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et la droite d passant par et de vecteur directeur $\vec{u}$ .

$M(x;y;z)\in d \quad \Leftrightarrow$ il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ c'est à dire $M(x;y;z)\in d \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$ .

Ce système est *une* représentation paramétrique de la droite d.
Le réel $t$ est le paramètre du point M.

**Réciproquement**, Soit $x_0, y_0, z_0, a, b, c$ des réels tels que ($a$ ; $b$; $c$) ≠ (0 ; 0 ; 0).

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

est la droite d passant par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ .

*Preuves*

**Exemple 1 :** Dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ), on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2,-1)$ .

**1.** Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ :

$M(x;y;z)\in d \quad \Leftrightarrow$ il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ c'est à dire $M(x;y;z)\in d \quad \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\y=-2+2t\\z=3-t\end{cases}$ .

**2.** Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{D}$ de paramètre 2 :

$t=2$ donc $M(3;2;1)$ et $\overrightarrow{AM}=2\vec{u}$ .

**3.** Le point $B(0;-4;4)$ appartient-il à $\mathscr{D}$ ?

On cherche s'il existe un réel $t$ tel que $\begin{cases}0=1+t\\-4=-2+2t\\4=3-t\end{cases}$ .

$\begin{cases}0=1+t\\-4=-2+2t\\4=3-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases} \Leftrightarrow t=-1$

il existe une unique valeur de $t$ solution du système donc B est un point de $\mathscr{D}$.
B a pour paramètre $-1$ ; on a $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ .

**Exemple 2 :** Dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ), $\begin{cases}x=4-5t\\y=-2-2t\\z=1+3t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A(4 ; -2 ; 1) et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-5;-2;3)$

**Exercice 7 :** Dans le repère (O, $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ), soit $E(2;-3;5)$ et $H(1;-8;8)$ ) deux points de l'espace et soit le vecteur $\vec{u}(-1;2;2)$ .

**a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}$ .
**b)** Déterminer une équation paramétrique de la droite (EH).
**c)** Le point $K(4;7;11)$ appartient-il à la droite (d) ? à la droite (EH) ?

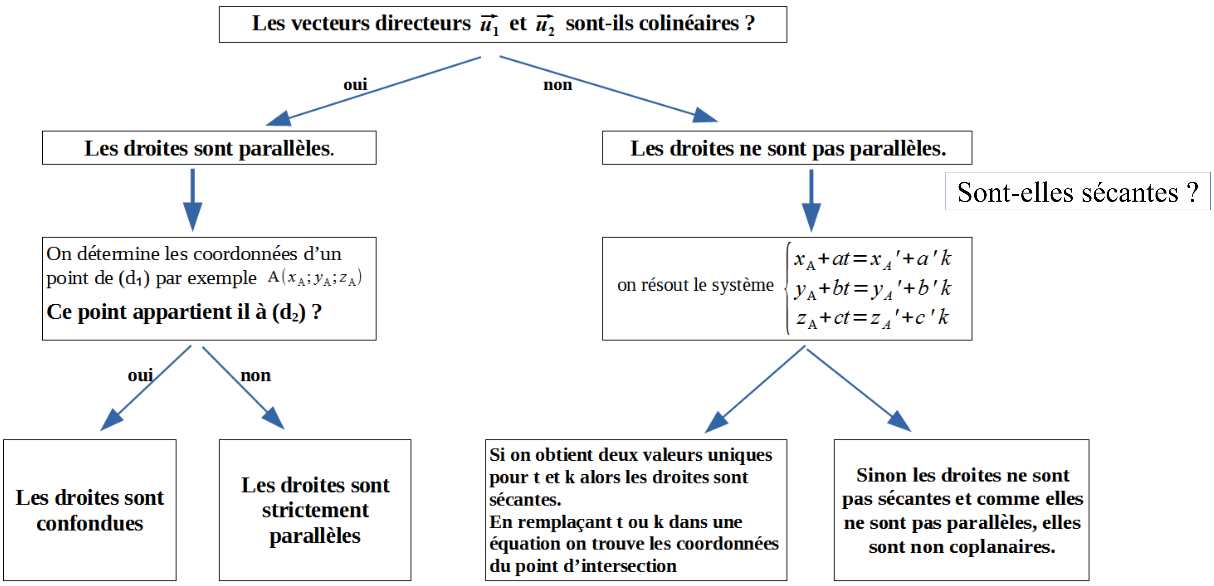
Un autre exemple en vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=y_YmAB-DELM

## IV - Positions relatives de droites

**Rappels : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.**
**Si elles sont coplanaires, elles sont alors parallèles ou sécantes.**

Soient deux droites $d_1$ et $d_2$ passant respectivement par $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}'(x_{\mathrm{A}'};y_{\mathrm{A}'};z_{\mathrm{A}'})$ et ayant comme vecteur directeurs respectifs $\vec{u}_1(a;b;c)$ et $\vec{u}_2(a';b';c')$.

Pour étudier la position relative de $d_1$ et $d_2$, on peut suivre l'algorithme suivant :




**Exercice 8 :** Étudier la position relative des droites $(d_1)$, $(d_2)$ et $(d_3)$ d'équations paramétriques :

$$(d_1) : \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+t \\ z=-3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad (d_2) : \begin{cases} x=-2-3k \\ y=-1{,}5k \\ z=4+4{,}5k \end{cases},\ k\in\mathbb{R} \qquad (d_3) : \begin{cases} x=4+h \\ y=2-h \\ z=1+h \end{cases},\ h\in\mathbb{R}$$

***Vidéo :*** *J'aicompris :* ***[https://youtu.be/1mF6IC5vDqU](https://youtu.be/1mF6IC5vDqU)***
*Maths-et-tiques :* ***[https://youtu.be/smCUbzJs9xo](https://youtu.be/smCUbzJs9xo)***

*Une minute pour comprendre : [http://www.uneminutepourcomprendre.org/methode/](http://www.uneminutepourcomprendre.org/methode/)*
*Géométrie dans l'espace sans coordonnées (paragraphes I et II)*
*Géométrie dans l'espace avec coordonnées(paragraphes III et IV)*