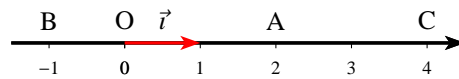
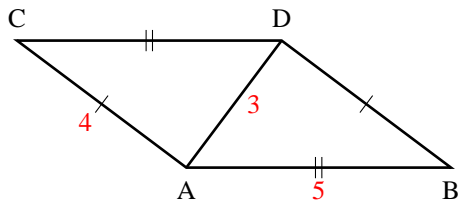


# Le produit scalaire.

## Sur les trois expressions du produit scalaire

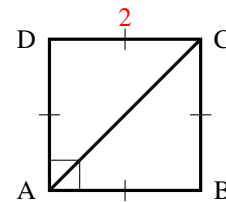
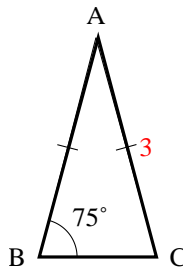
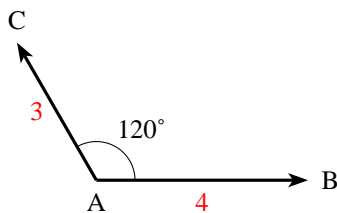
### EXERCICE 1

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  pour les 2 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :



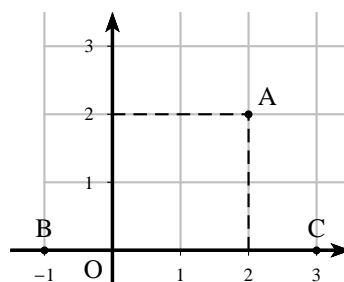
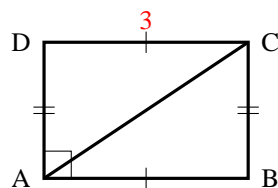
### EXERCICE 2

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  pour les 3 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :



### EXERCICE 3

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  pour les figures suivantes en choisissant la définition la mieux adaptée :

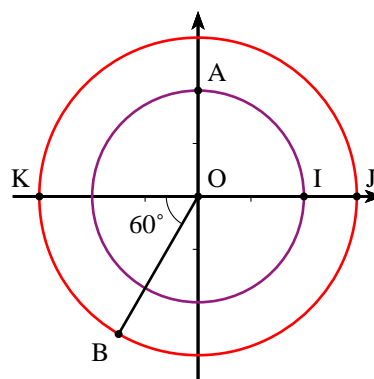


### EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

- a)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$       c)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$   
 b)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$       d)  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$



2) Prouver que dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées de B sont  $-\frac{3}{2}$  et  $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , puis calculer :

a)  $\vec{OA} \cdot \vec{AI}$

b)  $\vec{IA} \cdot \vec{IJ}$

c)  $\vec{BK} \cdot \vec{BA}$

**EXERCICE 5**

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

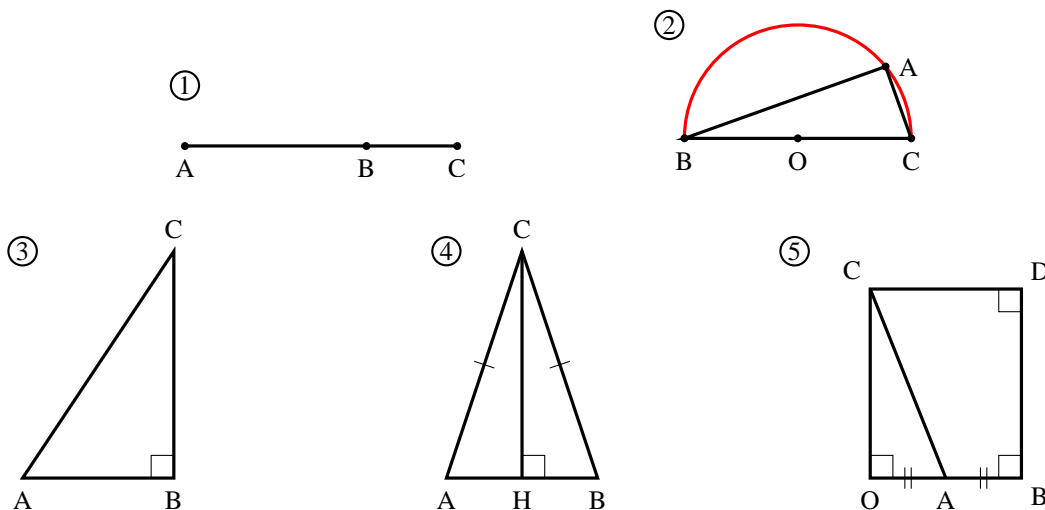
a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$

d)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}AB^2$

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2$

c)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB^2$

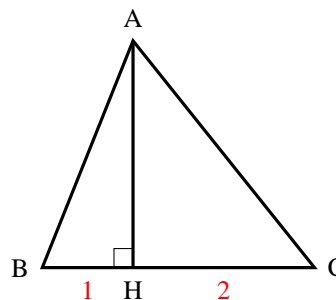
e)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$



**EXERCICE 6**

Quel théorème permet d'affirmer :

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 3 \quad \text{et} \quad \vec{CA} \cdot \vec{BC} = -6$$



**EXERCICE 7**

On donne trois points  $A(4 ; 1)$ ,  $B(0 ; 5)$  et  $C(-2 ; -1)$ .

1) Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

2) En déduire que  $\cos \widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  et donner une mesure, à un degré près, de  $\widehat{BAC}$ .

## Propriétés

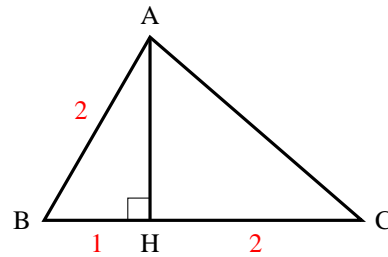
**EXERCICE 8**

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB}$

b)  $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

c)  $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$



## Orthogonalité

**EXERCICE 9**

Dans chacun des cas suivants, calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en fonction de  $m$  et déterminer le réel  $m$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

a)  $\vec{u}(-5; 2)$  et  $\vec{v}(m; -2)$

c)  $\vec{u}(m - 4; 2m + 1)$  et  $\vec{v}(2m; 3 - m)$

b)  $\vec{u}(m; 3 - m)$  et  $\vec{v}(2; -m)$

**EXERCICE 10**

On donne  $A(-4; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  et  $C(1; -4)$ .

1) Calculer  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

## Distance

**EXERCICE 11**

On donne les trois points  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 1)$  et  $C(3; -2)$ .

1) Calculer  $BC$ , puis  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a) Pourquoi  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$  ?

b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?

c) En déduire BH et HC.

**EXERCICE 12**

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4, \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 60^\circ$$

1) Démontrer que :  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$  et  $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$

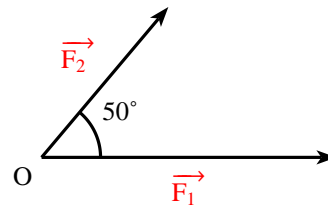
2) En déduire les longueurs AC et BD, et une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$

## Application en physique

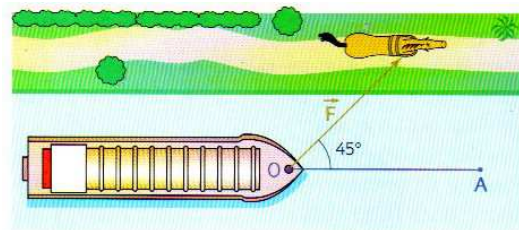
**EXERCICE 13****Intensité de la résultante**

Soit un point O soumis à deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.

**Travail d'une force**

Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force  $\vec{F}$  d'intensité de 2 000 newtons selon une force de 45° avec la direction du déplacement.



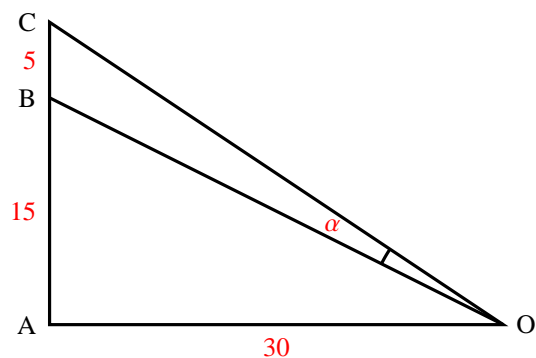
- 1) Quel est le travail W de la force ?
- 2) Si la péniche est tirée par un bateau, suivant l'axe du déplacement, quelle est l'intensité de la force qu'il faut exercer pour obtenir le même travail ?

**EXERCICE 14**

- 1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OA}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

- 2) Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle  $\alpha$ .

**Droites et cercles****EXERCICE 15**

$d$  est la droite d'équation :  $3x - y + 5 = 0$

- 1) Trouver un vecteur normal à  $d$ .
- 2) Trouver une équation de la droite  $\Delta$  passant par A(1; 2) et perpendiculaire à  $d$ .

**EXERCICE 16**

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites  $d_1$  et  $d_2$  sont perpendiculaires.

- a)  $d_1 : x - 2y + 4 = 0$  et  $d_2 : 6x + 3y - 7 = 0$

- b)  $d_1 : y = 2x + 5$  et  $d_2 : x - 2y + 1 = 0$   
 c)  $d_1 : (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$  et  $d_2 : (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

**EXERCICE 17**

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

- a) de centre  $A(1 ; -2)$  et de rayon 5 ;  
 b) de centre  $A(-1 ; 2)$  et passant par  $B(3 ; 4)$   
 c) de centre  $A(1 ; -4)$  et tangent à l'axe des abscisses

**EXERCICE 18**

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée est celle d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon :

- a)  $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$   
 b)  $(x - 2)(x + 5) + (y - 1)(y - 4) = 0$   
 c)  $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$

**EXERCICE 19**

Soit les points  $I(4 ; -1)$  et  $A(1 ; 5)$ .  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre I passant par A.

Démontrer que la droite  $d$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$  est tangente en A au cercle  $\mathcal{C}$

**EXERCICE 20**

On donne le point  $A(1 ; 2)$  et la droite  $d$  d'équation  $x + 2y = 0$ .  
 Démontrer que le cercle de centre A passant par O est tangent à  $d$ .

**EXERCICE 21**

$\mathcal{C}$  est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$  et  $d$  la droite d'équation  $x + 3y - 6 = 0$

- 1) Faire une figure.
- 2) Vérifier les points  $A(3 ; 1)$  et  $B(5 ; -1)$  appartiennent à  $\mathcal{C}$
- 3) a) Le droite  $d$  est-elle tangente à  $\mathcal{C}$  au point A ?  
 b) Déterminer l'équation de la droite  $d'$  tangente à  $\mathcal{C}$  en B.

**Relations métriques dans un triangle****EXERCICE 22**

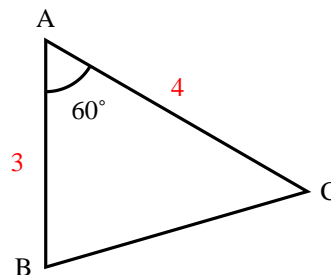
ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

- 1)  $AB = 8$ ,  $AC = 3$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .
- 2)  $AB = 48$ ,  $AC = 43$  et  $BC = 35$ .

**EXERCICE 23**

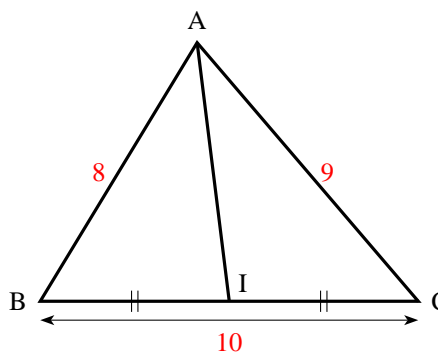
Dans la figure ci-contre, calculer :

- 1) L'aire du triangle ABC.
- 2) Le périmètre du triangle ABC.

**EXERCICE 24**

Dans la figure ci-contre, calculer :

- 1) La longueur de la médiane AI.
- 2) La longueur des deux autres médianes.

**EXERCICE 25**

L'aire d'un triangle ABC est  $5\sqrt{3}$ ,  $AB = 4$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$

- 1) Calculer AC
- 2) Démontrer que  $BC = \sqrt{21}$

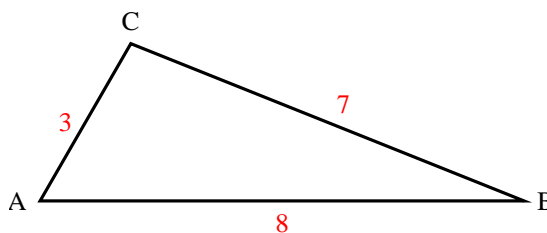
**EXERCICE 26**

ABC triangle tel que  $AB = 6$ ,  $AC = 4$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$ . L'unité est le cm.

- 1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ .
- 2) Trouver en  $\text{cm}^2$ , l'aire du triangle ABC.

**EXERCICE 27**

- 1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer  $\cos \widehat{BAC}$
- b) En déduire  $\sin \widehat{BAC}$
- 2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?

**EXERCICE 28**

ABCD est un parallélogramme tel que :  $AB = 7$   $AD = 3$   $AC = 8$

- 1) a) Démontrer que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$
- b) En calculant  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  d'une autre façon, trouver  $\cos \widehat{BAD}$ .  
En déduire que :  $\sin \widehat{BAD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$
- 2) a) Calculer l'aire du triangle BAD.
- b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

**Trigonométrie****EXERCICE 29**

- 1) Vérifier que :  $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$  puis calculer  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$
- 2) Vérifier que :  $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  puis calculer  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$

**EXERCICE 30**

Calculer  $\cos 2x$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$                       b)  $\cos x = \frac{3}{5}$                       c)  $\sin x = -\frac{1}{3}$

**EXERCICE 31**

Réduire les expressions suivantes :

- a)  $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$   
 b)  $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$   
 c)  $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$

**EXERCICE 32**

Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

- a)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$                       b)  $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$                       c)  $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

**EXERCICE 33**

$x$  est un réel de l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

- a) Réduire l'écriture de l'expression :  $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$
- b) En déduire que :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

**EXERCICE 34**

$a$  et  $b$  sont deux réels de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que :  $\cos a = \frac{3}{5}$  et  $\sin b = \frac{1}{2}$

- 1) Calculer  $\sin a$  et  $\cos b$ .
- 2) En déduire  $\cos(a + b)$  et  $\sin(a + b)$ .

**EXERCICE 35**

$a$  et  $b$  sont deux réels de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que :  $\sin a = \frac{1}{2}$  et  $\cos b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

- 1) Calculer  $\cos a$  et vérifier que  $\sin b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .
- 2) a) Calculer  $\cos(a + b)$  et  $\sin(a + b)$ .  
b) En déduire  $(a + b)$  puis  $b$ .

**EXERCICE 36**

$a$  est un réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que :  $\cos a = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

- 1) Calculer  $\cos 2a$
- 2) a) A quel intervalle appartient  $2a$   
b) En déduire  $a$ , en justifiant votre réponse.

**EXERCICE 37**

$a$  est un réel de l'intervalle  $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

- 1) a) Démontrer que :  $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$   
b) En déduire que :  $\frac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
- 2) Sans calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\cos \frac{\pi}{12}$ , déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

**EXERCICE 38****Triangle et cercle inscrit**

Comme l'indique la figure ci-contre,  $ABC$  est un triangle, le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 4 est le cercle inscrit tangent en  $I$  à  $(AB)$ .

On a  $IA = 8$  et  $IB = 6$ .

- 1) a) Calculer :  $\sin \widehat{A}$  et  $\cos \widehat{A}$   
b) Déduire que :  
 $\sin \widehat{A} = \frac{4}{5}$  et  $\cos \widehat{A} = \frac{3}{5}$ .
- 2) De même, calculer  $\sin \widehat{B}$  et  $\cos \widehat{B}$ .
- 3) a) Démontrer que :  $\cos \widehat{C} = -\cos(\widehat{A} + \widehat{B})$  et  $\sin \widehat{C} = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$   
b) En déduire  $\cos \widehat{C}$  et  $\sin \widehat{C}$

