

Courbes : les maths en pleine forme

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ? À QUOI SERT-ELLE ?

Brigitte CHAPUT

École Nationale de Formation Agronomique de Toulouse-Auzeville
Régionale APMEP et IREM de Toulouse
Commission inter-IREM *Statistiques et probabilités*

LA COURBE DE GAUSS : QUI EST-ELLE ?

La plus simple d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

à première vue compliquée puisqu'elle utilise deux nombres mystérieux en mathématiques :

- le nombre $\pi = 3,141\ 592\ 653\dots$
- le nombre $e = 2,718\ 281\ 828\dots$

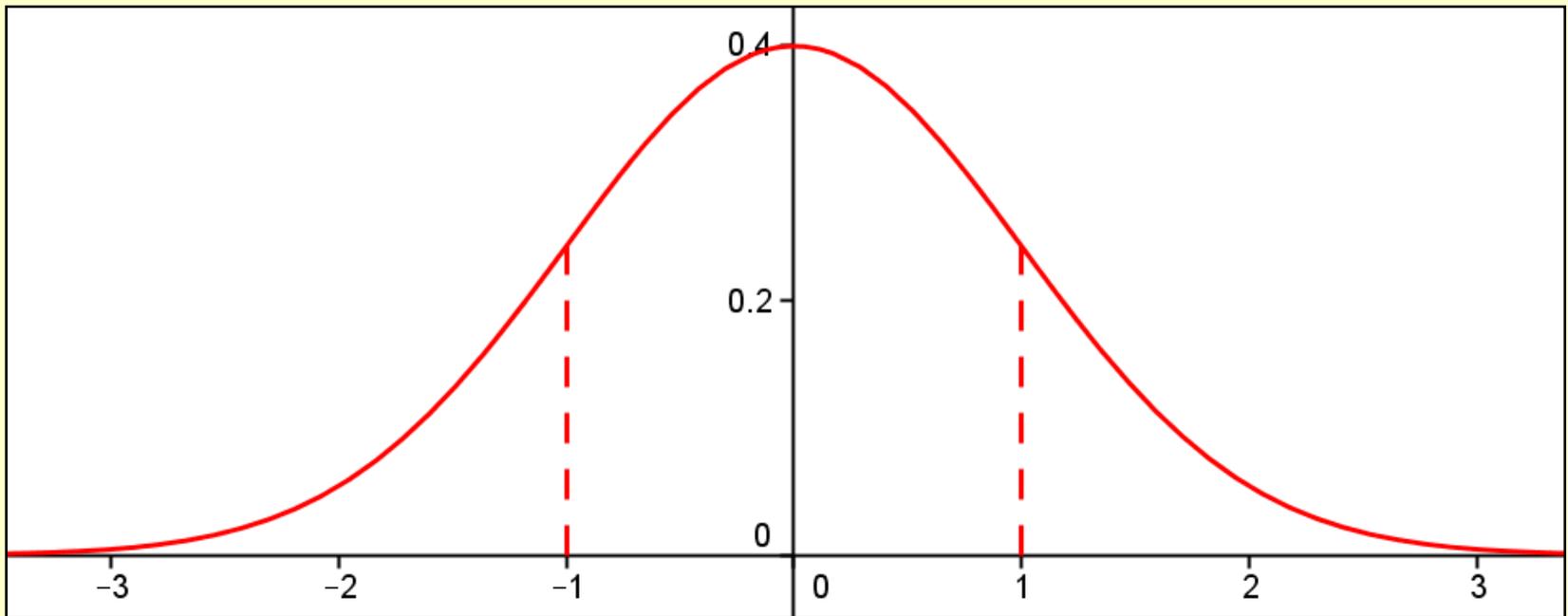
mais de forme connue en cloche, en chapeau de gendarme.



LA COURBE DE GAUSS : QUI EST-ELLE ?

Des propriétés géométriques remarquables :

- un axe de symétrie,
- deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Elle est née au 18^e siècle, de la recherche d'une « loi du hasard », et plus précisément du désir de préciser la façon dont la fréquence se rapproche de la probabilité au cours de nombreuses répétitions d'une même épreuve aléatoire.

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Le but est de déterminer la valeur d'une probabilité de façon objective notamment dans le cas où on s'intéresse à la réalisation ou non d'un résultat d'une expérience aléatoire.

L'idée est que l'on peut approcher cette valeur grâce à la répétition de l'expérience et ce d'autant mieux que le nombre de répétitions est grand.

L'objectif des mathématiciens était double : prouver une convergence et la préciser.

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Détaillons : pour une expérience aléatoire, on s'intéresse à la réalisation ou non d'un de ses résultats.

Par exemple :

- On lance une pièce de monnaie.
- On lance un dé.
- On tire une boule au hasard dans une urne.
- On fait tourner une roue de loterie et on regarde si on tombe ou non sur un secteur d'une couleur donnée...



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue une fois, on peut obtenir *FACE* (F) ou non (\bar{F}).

$$P(F) = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{F}) = \frac{1}{2}$$

ainsi

$$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{2}$$

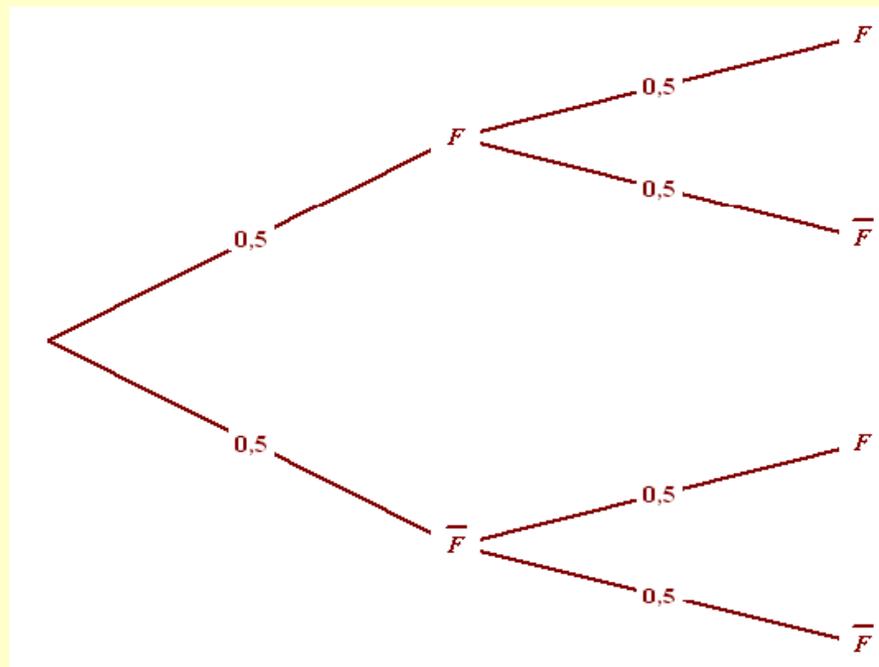
$$P(1 \text{ fois } F) = \frac{1}{2}$$

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue deux fois, on peut obtenir F aucune, une ou deux fois.



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue deux fois, on peut obtenir F aucune, une ou deux fois.

$$P(F, F) = \frac{1}{4}$$

$$P(F, \bar{F}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{F}, F) = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{F}, \bar{F}) = \frac{1}{4}$$

$$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{4}$$

$$\text{ainsi } P(1 \text{ fois } F) = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \text{ fois } F) = \frac{1}{4}$$

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

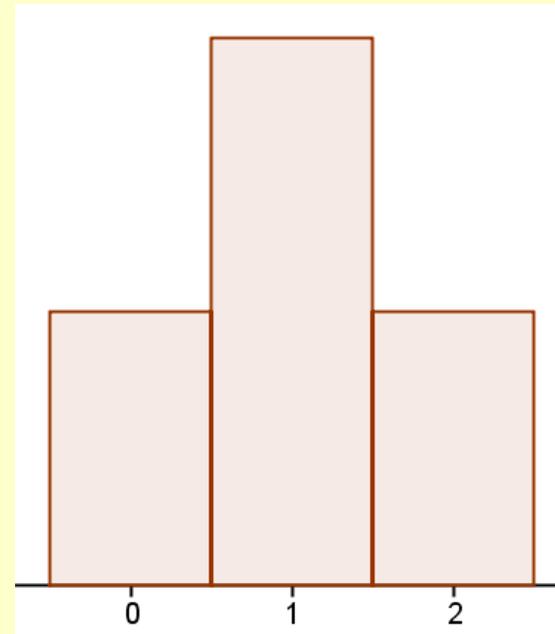
Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue deux fois, on peut obtenir F aucune, une ou deux fois.

$$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{4}$$

$$P(1 \text{ fois } F) = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \text{ fois } F) = \frac{1}{4}$$

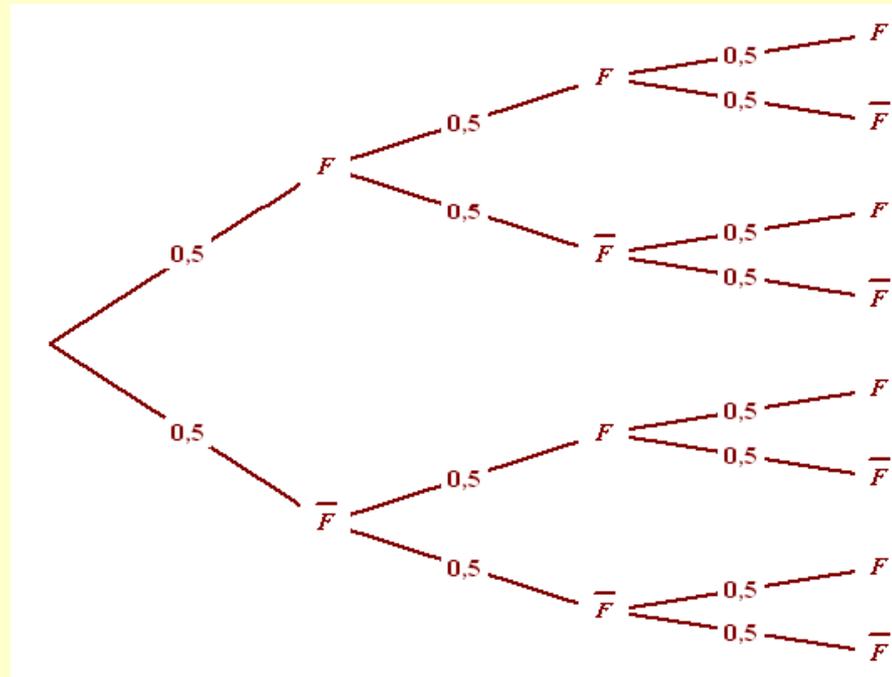


LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue trois fois, on peut obtenir F aucune, une, deux ou trois fois.



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

- Si on joue trois fois, on peut obtenir F aucune, une, deux ou trois fois.

$P(F, F, F) = \frac{1}{8}$	$P(\bar{F}, F, F) = \frac{1}{8}$	$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{8}$
$P(F, F, \bar{F}) = \frac{1}{8}$	$P(\bar{F}, F, \bar{F}) = \frac{1}{8}$	$P(1 \text{ fois } F) = \frac{3}{8}$
$P(F, \bar{F}, F) = \frac{1}{8}$	$P(\bar{F}, \bar{F}, F) = \frac{1}{8}$	$P(2 \text{ fois } F) = \frac{3}{8}$
$P(F, \bar{F}, \bar{F}) = \frac{1}{8}$	$P(\bar{F}, \bar{F}, \bar{F}) = \frac{1}{8}$	$P(3 \text{ fois } F) = \frac{1}{8}$

ainsi

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

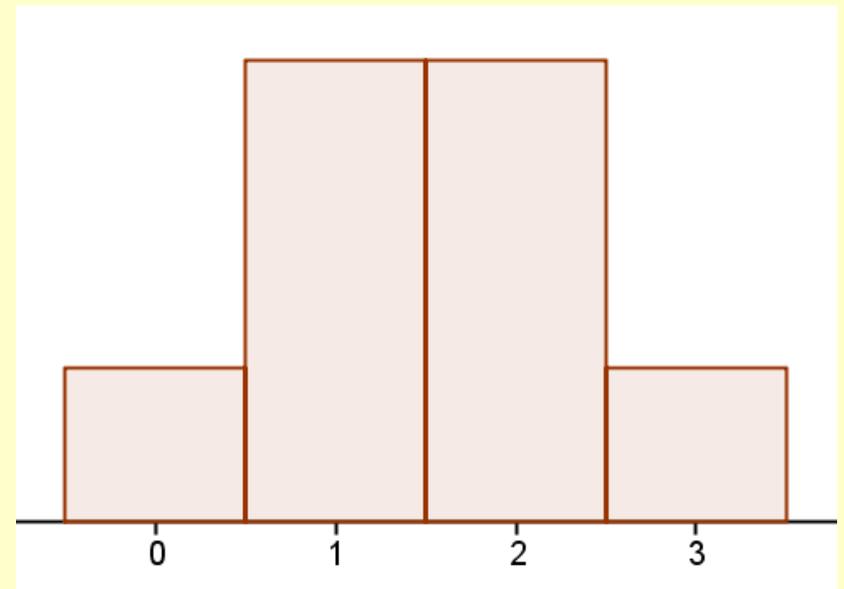
- Si on joue trois fois, on peut obtenir F aucune, une, deux ou trois fois.

$$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{8}$$

$$P(1 \text{ fois } F) = \frac{3}{8}$$

$$P(2 \text{ fois } F) = \frac{3}{8}$$

$$P(3 \text{ fois } F) = \frac{1}{8}$$



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées

Jeu de *PILE OU FACE* avec une pièce bien équilibrée

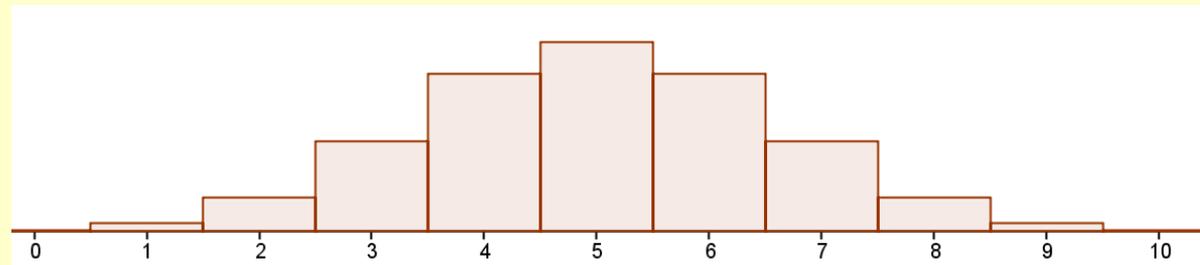
- Si on joue dix fois, on peut obtenir F aucune, une, ... ou dix fois.

$$P(0 \text{ fois } F) = \frac{1}{1\,024}$$

$$P(1 \text{ fois } F) = \frac{10}{1\,024}$$

•
•
•

$$P(10 \text{ fois } F) = \frac{1}{1\,024}$$



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les distributions binomiales

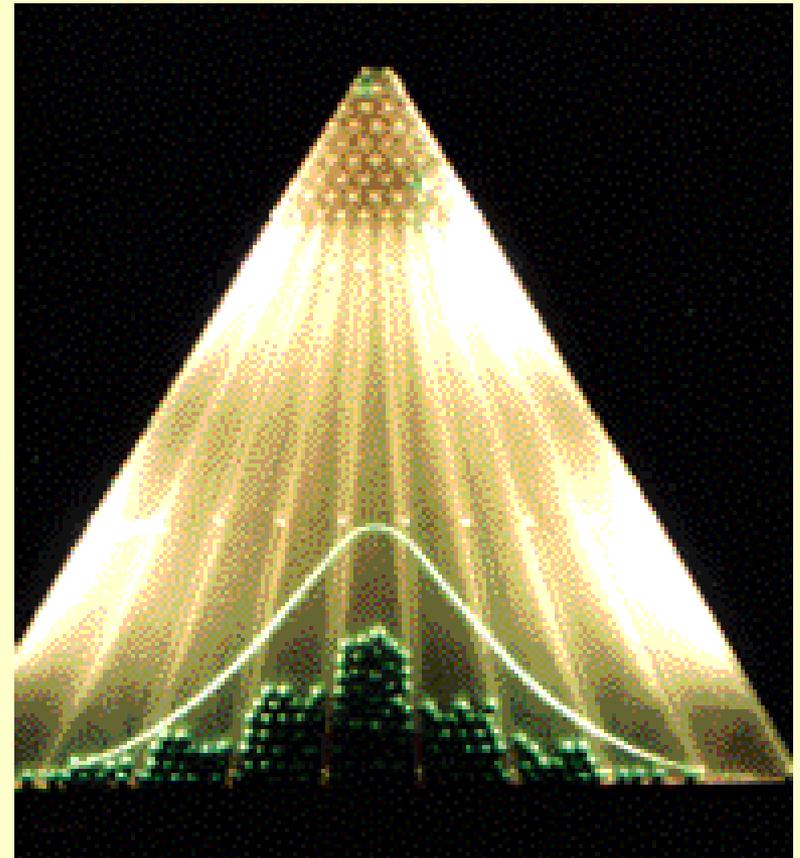
Les distributions de probabilités obtenus sont des **distributions binomiales** de paramètres $1, 2, \dots$ ou 10 (nombre de répétitions de l'expérience aléatoire) et $0,5$ (probabilité du résultat lors d'une expérience aléatoire).

Historiquement, avec Abraham de Moivre (1728) et Laplace (1786), ce sont les distributions binomiales qui ont conduit à la courbe de Gauss.



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Les expériences répétées : planche de Galton

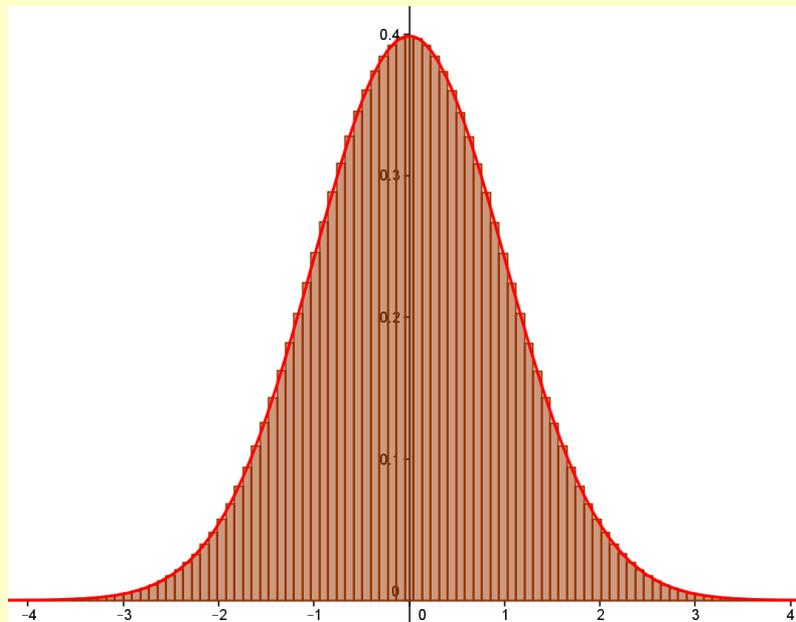


Espace Mendès-France Poitiers - 20 mars 2013 - Brigitte Chaput

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires de distribution binomiale de paramètres n et p (fixé).

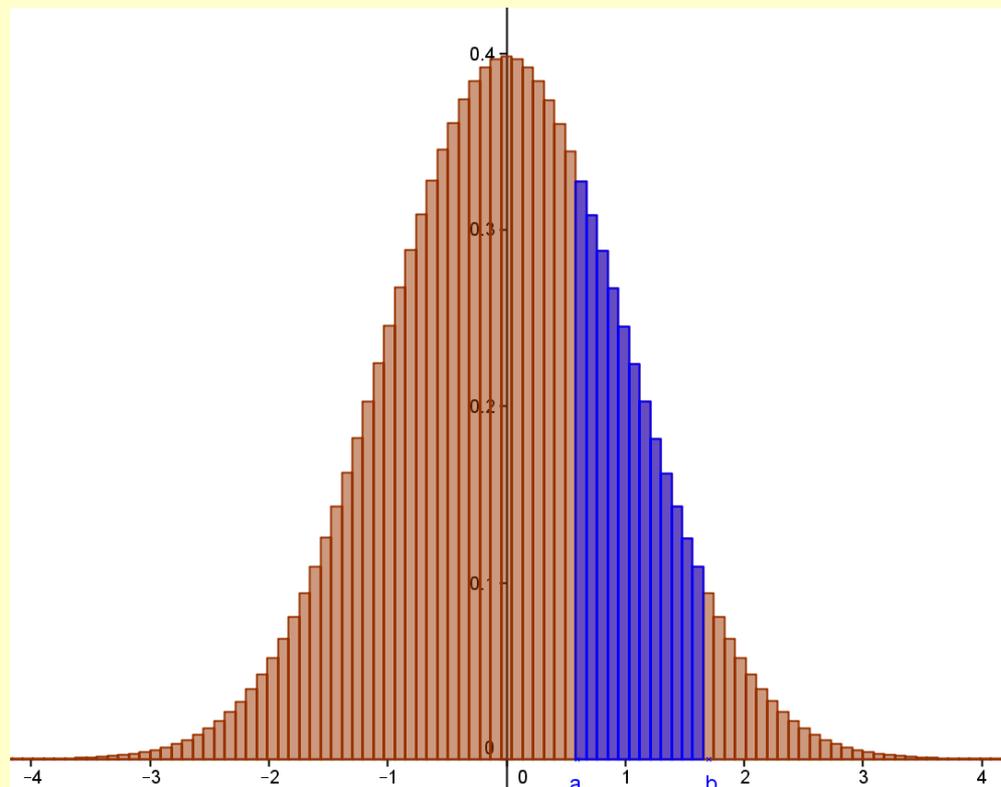
Quand n tend vers l'infini :



La courbe de Gauss apparaît !!

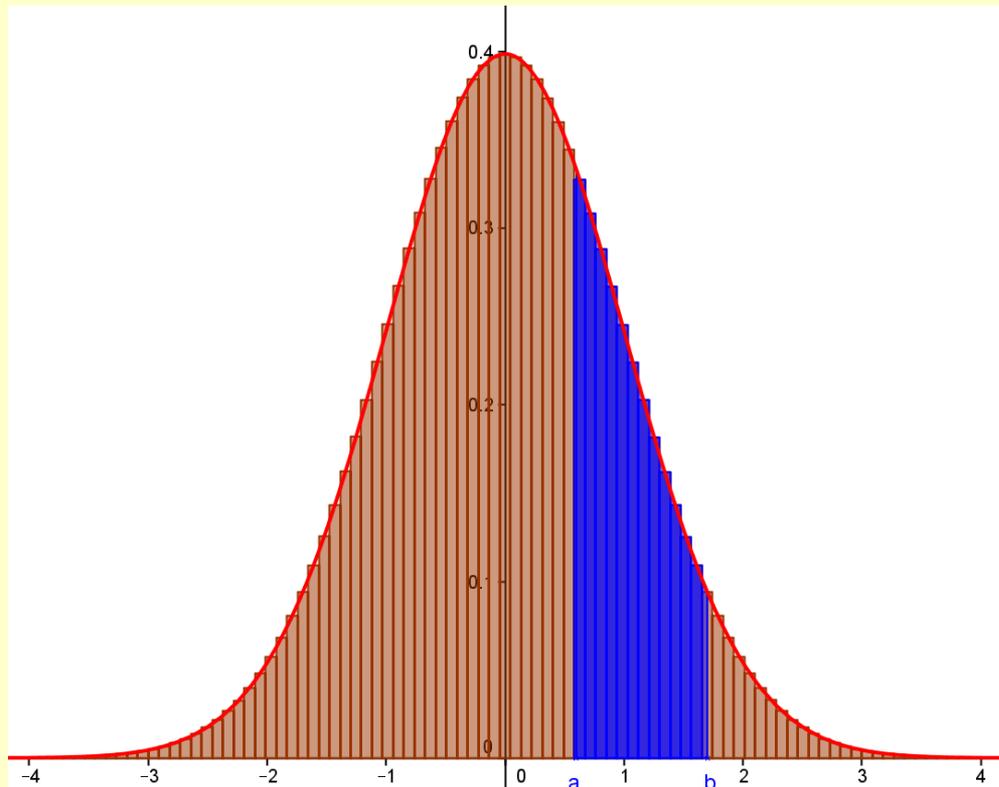
LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

La courbe de Gauss apparaît comme densité de probabilité (les probabilités d'observations dans un intervalles sont calculées à l'aide d'une intégrale sur cet intervalle).



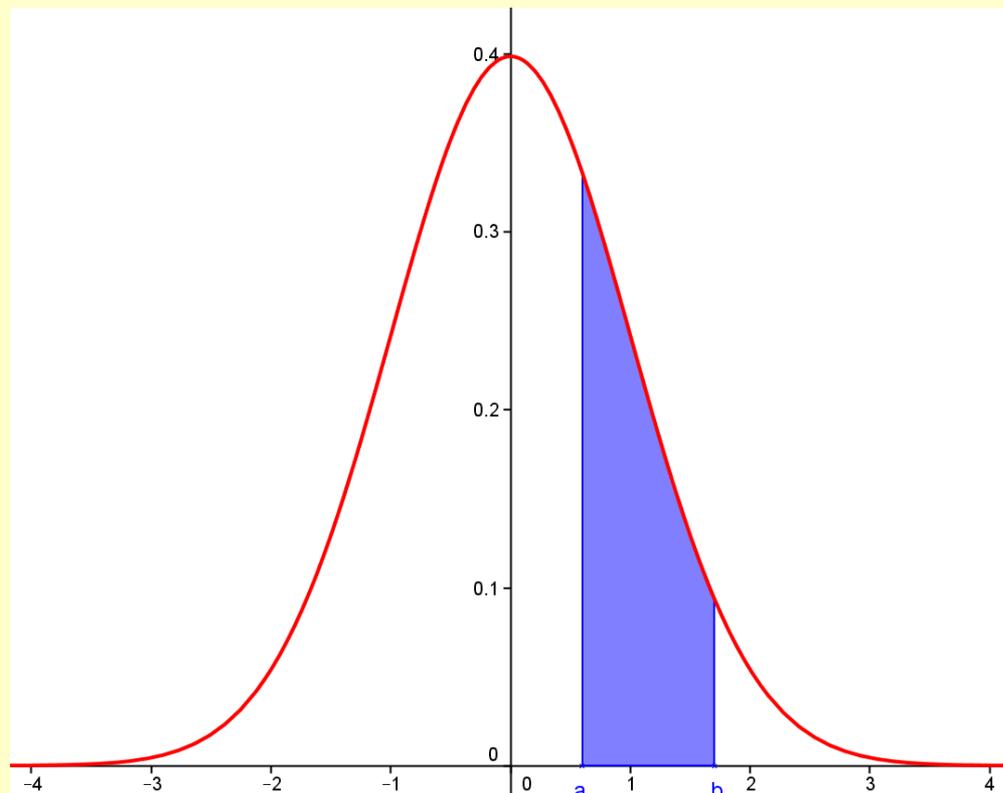
LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

On a :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

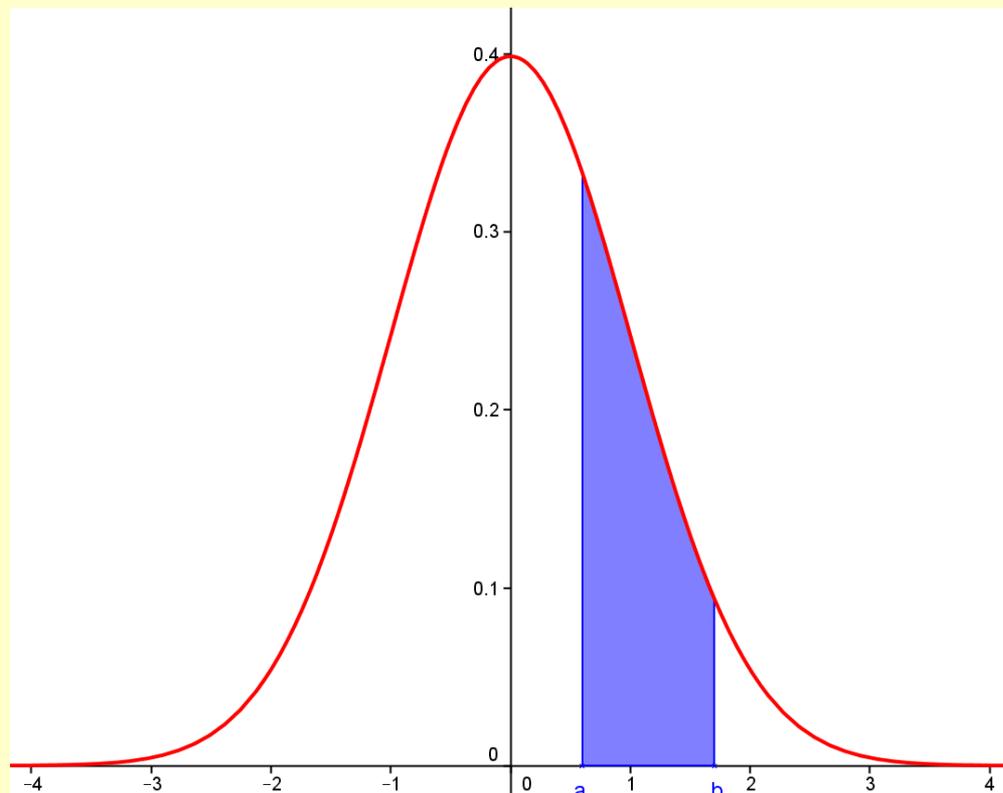
La courbe de Gauss apparaît comme densité de probabilité (les probabilités d'observations dans un intervalles sont calculées à l'aide d'une intégrale sur cet intervalle).



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

La courbe de Gauss apparaît comme densité de probabilité.

Toute variable aléatoire de densité la fonction représentée par cette courbe est distribuée selon la **loi normale centrée réduite**.



LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Origine du nom " *normale* "

1889 : Francis Galton avait déjà parlé de *courbe normale* dans *Natural Inheritance*

1893 : Karl Pearson donne le nom de *loi normale* à la loi appelée par l'école française *deuxième loi de Laplace* ou *loi de Laplace-Gauss* et par l'école anglo-saxonne *loi de Gauss*.

Karl Pearson a ensuite reconnu en 1920 que ce nom de *normal* était inadéquat et qu'il « *a le désavantage de conduire les gens à croire que toutes les autres distributions de fréquences sont en un sens ou un autre anormales.* »

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Le théorème-limite central

Le résultat précédent est traduit par un théorème mathématique le **théorème-limite central** qui dit dans sa forme la plus générale que, sous certaines conditions, la suite des moyennes centrées, réduites de variables aléatoires indépendantes tend vers la loi normale centrée réduite.

C'est pour cette raison qu'on la rencontre un peu partout.

Dès qu'un phénomène est la superposition d'un grand nombre de causes aléatoires *indépendantes*, une cloche se présente.

LA COURBE DE GAUSS : D'OÙ VIENT-ELLE ?

Le théorème-limite central

Il s'agit de l'un des exemples les plus frappants de phénomènes d'universalité en mathématiques : en ajoutant un grand nombre d'aléas dont on ne sait rien, la distribution limite de la somme est une courbe de Gauss.



LA COURBE DE GAUSS

Les mathématiciens contributeurs

