Jules cherche à fabriquer un aquarium (sans couvercle) de base carrée d'un volume de 13,5 L au total (Soit 13500 $cm^3$ ). Il cherche à déterminer les dimensions de l'aquarium afin d'utiliser le moins de matériaux possible.

**1.** On note $x$ la longueur, en cm, d'un côté de la base ; $x \in ]0;80]$ .

La hauteur de l'aquarium en fonction de $x$ est $h=\dfrac{13500}{x^2}$ .

**2.** Soit $\mathrm{A}(x)$ la somme des aires de toutes les faces de l'aquarium.

La base carrée a pour aire $x^2$ et les quatre faces latérales sont des rectangles de dimensions $x$ et $h$ donc d'aire $x \times h$ .

On a donc $\mathrm{A}(x)=x^2+4x\times h=x^2+\dfrac{54000}{x}$

Inutile de mettre au même dénominateur, la dérivée de cette expression est très simple.

**3.** Montrer que $A'(x)=\dfrac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2}$

Sachant que $\mathrm{A}(x)=x^2+\dfrac{54000}{x}$ , on en déduit que $\mathrm{A}'(x)=2x-\dfrac{54000}{x^2}$

**POINT MÉTHODE** :

1. Vous ne savez pas que $A'(x)=\dfrac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2}$ , vous devez le prouver :-)

On sait que $\mathrm{A}'(x)=2x-\dfrac{54000}{x^2}=\dfrac{2x^3-54000}{x^2}$

*Méthode* : développer $2(x-30)(x^2+30x+900)$ et vérifier que c'est égal à $2x^3-54\,000$ .

2. *Réflexe* : Si on vous a fourni une expression de $\mathrm{A}'(x)$ qui n'était pas évidente au départ, c'est que vous allez devoir l'utiliser par la suite...

**4.** Établir le tableau de variation de $\mathrm{A}(x)$ sur son ensemble de définition.

**Étudier les variations de la fonction A, c'est étudier le signe de $\mathbf{A}'(x)$ .**

Vous choisissez l'expression fournie en 3.

Pour tout réel $x\in]0;80]$ , $\mathrm{A}'(x)$ est du signe de $(x-30)(x^2+30x+900)$ …

*Réflexe* : vérifier à la calculatrice que la courbe représentative de la fonction A correspond à votre tableau de variations.

## SYMBOLE $\Leftrightarrow$ et SYMBOLE =

**Ces deux symboles $\Leftrightarrow$ et = ne sont pas interchangeables**

**Le symbole équivalent**, noté $\Leftrightarrow$ est un connecteur logique.
**Il s'écrit entre deux propositions (phrase vraie ou fausse au sens mathématique).**

**Le symbole égal, noté = ,**
**Il s'écrit entre deux nombres.**

$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ c'est : « si P est vraie alors Q est vraie » ou « si P alors Q ». On dit « P implique Q ».

$\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$ c'est : $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P}$ . On dit « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ».
P et Q sont alors TOUTES LES DEUX VRAIES ou TOUTES LES DEUX FAUSSES.

**Résolution d'équations** : on essaie tant que c'est possible de procéder par équivalences.

Exemple : $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Un classique : Pour tous réels, *a*, *b* et *c*, $a=b \Rightarrow ac=bc$

MAIS On ne peut pas dire que pour tous réels, *a*, *b* et *c*, $ac=bc \Rightarrow a=b$

En effet : $5\times 0=7\times 0$ et pourtant $5\neq 7$ .

Un autre classique : « Pour tout réel *x*, $x=2 \Rightarrow x^2=4$ » est vrai

MAIS... « Pour tout réel *x*, $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ » est faux.

En effet : avec $x=-2$ , $x^2=4$ est vrai et $x=2$ est faux.

Subtilité... « Pour tout réel positif *x*, $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ » est vrai.

**Le symbole =** traduit une égalité entre deux réels.

$\mathrm{A}(x)=x^2+\dfrac{54000}{x}$ signifie que pour tout réel *x*, le réel $\mathrm{A}(x)$ et le réel $x^2+\dfrac{54000}{x}$ sont égaux.

L'écriture $a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)$ n'a aucun sens : $a^2-b^2$ n'est pas une proposition !