TS - DM2 : correction

Exercice n°1

Z est un complexe non nul. $A=z^2+\overline{z}$

On pose $z=x+iy$; On a donc $A=(x+iy)^2+x-iy=x^2+2iy-y^2+x-iy=x^2-y^2+x+i(2xy-y)$

RAPPEL : $\Re e(A)=x^2-y^2+x$ et $\Im m(z)=2xy-y$

A est un réel $\Leftrightarrow$ $\Im m(z)=0$ $\Leftrightarrow$ $2xy-y=0$ $\Leftrightarrow$ $y(2x-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $y=0$ ou $x=0{,}5$

Vous cherchez l'ensemble de tous les points M d'affixe z qui vérifient $A\in\mathbb{R}$.

L'ensemble cherché est $\Delta\cup\Delta'$ ou Δ est l'axe des abscisses et Δ' la droite d'équation $x=0{,}5$.

Complément :

A est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\Re e(z)=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2-y^2+x=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x-y^2=0$ $\Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-y^2=0$ $\Leftrightarrow$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$

Vous n'avez pas les outils pour conclure. Il s'agit d'une hyperbole...

Exercice n°2

Déterminer les points d'affixe z tels que $B=\frac{z+2}{z-2}$ est un imaginaire pur.

On pose $z=x+iy$; $B=\frac{x+2+iy}{x-2+iy}=\frac{(x+2+iy)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2-4)+i(-4y)}{(x-2)^2+y^2}$

B est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\Re e(z)=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-4=0$ et $(x-2)^2+y^2\neq 0$

$(x-2)^2+y^2=0$ $\Leftrightarrow$ $x=2$ ET $y=0$ donc il faut exclure le point (2;0)

$x^2+y^2-4=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=4$ qui est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon 2.

Bilan : L'ensemble cherché est le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 2 privé du point A(2;0).

Exercice 3

Partie I : **1.** Graphiquement : $f(0)=0$ $f'(0)=-3$ $f'(1)=0$ et $f(-3)=9$.

2. La représentation graphique de la fonction *f* donne les informations suivantes :

x	-3		1		3
Variation de *f*	9	↘	?	↗	9
Signe de $f'(x)$		-	0	+	

- $f'(1)=0$ exclut la courbe 3.
- $f'(0)=-3$ exclut la courbe 2.
- Vérifions que la courbe 1 satisfait toutes les données résumées dans le tableau ci-dessus :

  f étant décroissante sur [-3;1], $f'(x)$ doit être négatif sur [-3;1].

  f étant croissante sur [1;3], $f'(x)$ doit être positif sur [1;3].

ATTENTION, l'énoncé ne dit pas que *f* admet un maximum en -3 . Il pourrait très bien y avoir un point d'inflexion... c'est-à-dire une dérivée qui s'annule sans changer de signe...

Partie II : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f(0)=0$ $f'(0)=-3$; $f'(1)=0$ et $f(-3)=9$.

Ce sont les seules données confirmées dans l'énoncé... vous devez utiliser celles-ci...

1. $f(0)=0 \Leftrightarrow d=0$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=-3$ et $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Leftrightarrow c=-3$

On a donc $f(x)=ax^3+bx^2-3$

$f(-3)=0 \Leftrightarrow -27a+9b+9=9 \Leftrightarrow -27a+9b=0 \Leftrightarrow -3a+b=0$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 3a+2b-3=0$

On doit donc résoudre le système (S) : $\begin{cases}-27a+9b=0\\ 3a+2b=3\end{cases}$ ou $\begin{cases}-3a+b=0\\ 3a+2b=3\end{cases}$

(S) $\Leftrightarrow$ $b=1$ et $a=\dfrac{1}{3}$.

On a donc $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x$.

2. Le point B a pour abscisse 1 et B est un point de C_f donc $y_B=f(1)$.

$f(1)=\dfrac{1}{3}+1-3=\dfrac{-5}{3}$ donc B a pour coordonnées $\left(1;-\dfrac{5}{3}\right)$.