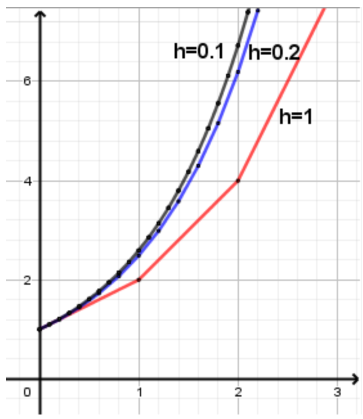
Fonctions	**La fonction exponentielle (I)**

Compétences	*Exercices corrigés*
ROC : savoir démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	*Page 106*
Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. Savoir utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.	*2 p 107* *3 p 109*
Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. Savoir étudier une fonction contenant e^x	*1 p 107* *6 p 111*
Savoir dériver / étudier des fonctions de la forme e^u	*8 p 113 ; 9 p 113 ; 132 p 119*
Savoir résoudre une équation, inéquation avec la fonction exponentielle.	*4 p 109*
Savoir utiliser sa calculatrice pour trouver la valeur de e^x	*p 108*

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques sont modélisés par une fonction *f* qui est proportionnelle à sa dérivée f'. Nous étudierons, entre autre, la désintégration de noyaux radioactifs.

1. Activité



Vous avez construit une l'approximation graphique d'une fonction f dérivable telle que $f'=f$ et $f(0)=1$ dans le cas où $h=1$.

Voici le tracé dans le cas $h=0,2$ en bleu puis $h=0,1$ en noir.

Plus on choisit une valeur de h proche de 0, plus la courbe obtenue est « lisse »

La courbe obtenue est une approximation de la fonction exponentielle

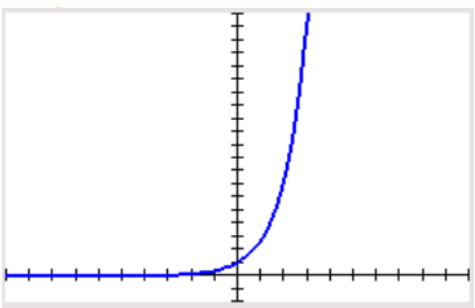
2. La fonction exponentielle : existence et unicité

Définition : On appelle fonction exponentielle l'unique fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. On la note *exp* et on note $e=\exp(1)$.

Lemme : Si *f* est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$, alors *f* ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. *Preuve*

Théorème : Il existe une <u>unique</u> fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
On note cette fonction provisoirement *exp*

Preuve de l'unicité (ROC). L'existence est admise.

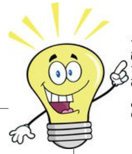


X	Y1
-4	0.0183
-3	0.0498
-2	0.1353
-1	0.3679
0	1
1	2.7183
2	7.3891
3	20.086
4	54.598
5	148.41
6	403.43

La courbe de la fonction exponentielle et un tableau de valeurs.

Remarque : On prouvera que la fonction exponentielle est croissante. Sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.
C'est pour cela que l'on utilise souvent l'expression « une croissance exponentielle ».

3. Propriétés

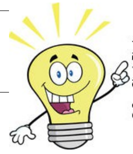


Avec la notation *exp*, on a prouvé : Pour tout réel x, on a $\mathbf{exp(x) \neq 0}$ et $\mathbf{(exp(x))' = exp(x)}$

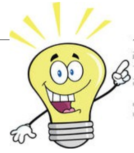
Propriété : Pour tout réel x, on a $\exp(\boldsymbol{x}) \times \exp(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$. *preuve*

Ex 4 à 7 p 114 (calculs de dérivés)   Ex 8 à 11 p 114 (calculs de dérivées et sens de variations)

Propriété fonctionnelle : **Quels que soient les réels *a* et *b*,** $\exp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \exp(\boldsymbol{a}) \times \exp(\boldsymbol{b})$
Preuve



***Preuve* :** utiliser la fonction g définie par $g(x) = \exp(a+b-x) \times \exp(x)$



Propriétés : **(1)** $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp(x) > 0}$ **.**

(2) Pour tout réel *x*, la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp(2x) = (exp(x))^2}$ **.**

(4) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}}$ **.**

(5) Pour tous réels *a* et *b*, $\exp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \dfrac{\exp(\boldsymbol{a})}{\exp(\boldsymbol{b})}$ **.**

(6) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ **et** $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\exp(\boldsymbol{nx}) = (\exp(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{n}}$

Preuves : (1) Idée : $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$ (3) Idée : $2x = x + x$!

(4) Idée : Calculer $\exp(x) \times \exp(-x)$ (5) découle de (4)   (6) Par récurrence :-)

Exercices 12 à 20 p 114 ; 57 à 63 p 116 ; 66 à 71 p 116

4. Le nombre *e* et la notation e^x

Le nombre *e* est une constante valant environ 2,7 et parfois appelée nombre exponentiel, nombre d'Euler ou constante de Néper en référence aux mathématiciens Leonhard Euler et John Napier.

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718$

Euler (1707-1783)

Comme π , le nombre *e* est un **nombre irrationnel,** c'est à dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Le nombre *e* est également un **nombre transcendant :** il n’est solution d’aucune équation à coefficients entiers.

e s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont : 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995…

Leonhard Euler, dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* (publié en 1748), calcule 18 décimales exactes et cela sans calculatrice...

Il utilise la formule $\mathrm{e} = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$. Rappelons que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k$;

Par exemple 5! qui se lit « factoriel 5 » est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ et vaut 120

Source : http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-e

5. Une nouvelle notation

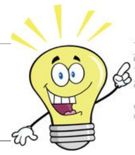
Sachant que $\exp(\boldsymbol{nx})=(\exp(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{n}}$ pour tout réel x et tout entier n donc avec $x=1$, on a :

$$\exp(\boldsymbol{n}\times\mathbf{1})=(\exp(\mathbf{1}))^{\boldsymbol{n}}=\mathbf{e}^{\boldsymbol{n}}$$

On a une analogie avec les puissances qui permet d'étendre la notation exponentielle :

$a^n\times a^p=a^{n+p}$ $\quad a^0=1$ $\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad (a^n)^p=a^{n\times p}$

Notation : on note $\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}}$ l'image de x par la fonction exponentielle.
On notera désormais e la fonction exponentielle : $\exp(x)=\mathrm{e}^x$



Avec cette nouvelle notation, on peut réécrire les propriétés de la fonction exponentielle :

- **La fonction $x\to\mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.**
- **$\mathrm{e}^0=1$.**
- **Quels que soient les entiers a et b, $\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b=\mathrm{e}^{a+b}$.**
- **Quels que soient les entiers a et b, $\mathrm{e}^{-a}=\frac{1}{\mathrm{e}^a}$ et $\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}=\mathrm{e}^{a-b}$**
- **Pour tout réel x et tout entier n, $\mathrm{e}^{nx}=(\mathrm{e}^x)^n$**
- **Pour tout réel x, e^x est strictement positif.**

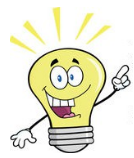
Exercice 1 : Simplifier les écritures : $A=\frac{\mathrm{e}^7\times\mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-5}}$; $B=(\mathrm{e}^5)^{-6}\times\mathrm{e}^{-3}$ et $C=\frac{1}{(\mathrm{e}^{-3})^2}+\frac{(\mathrm{e}^4)^{-1}}{\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}^{-6}}$

Exercice 2 : Démontrer que, pour tout réel x , $\frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^3 x}$.

Ex 16 à 20 page 114 et 66 à 78 page 116 ; Ex 1;2;3 page 114 (comparaison)

6. Équation et inéquation

Propriétés :
Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a=b$ et $\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a<b$
Preuve...



Exercice n°3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\mathrm{e}^{x^2-1}=1$ et $\mathrm{e}^{x-2}>\mathrm{e}$

Exercices 21 à 33 p 114/115 ; 79 à 84 p 117 ; 87 et 88 p 117

Exercice n°4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-3)(\mathrm{e}^{-3x}-1)$.
Γ est la courbe représentative de f dans un repère.
a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe Γ avec les axes du repère.
b) Étudier la position relative de la courbe Γ et de l'axe des abscisses.

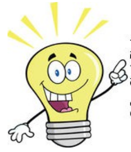
Une résolution d'équation avec exponentielle en vidéo (Yvan Monka) : https://youtu.be/dA73-HT-I_Y
Une résolution d'inéquation avec exponentielle en vidéo (Yvan Monka) : https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y
Toutes les techniques et d'autres explications sur équations et inéquations avec Mathrix :
https://www.youtube.com/watch?v=xo065XC0Rh4&index=3&list=PLB2JiklA1NHExVfDAy4qtpqEv7FovuOY5

Fonctions de la forme e^u où *u* est une fonction définie sur un intervalle I

a)Propriété (admise) :

> Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
> La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times e^u$.
> La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction *u*.

Exemple : soit *f* la fonction définie par $f(x)=e^{-3x+5}$
f est de la forme e^u avec $u(x)=-3x+5$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-3e^{-3x+5}$
$\forall \in \mathbb{R}$, $f'(x)<0$ donc la fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

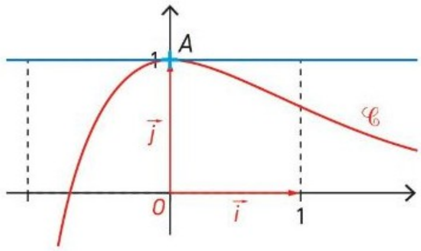


> **Un classique** : la fonction définie par $f(x)=e^{-x}$ a pour dérivée $f'(x)=-e^{-x}$

Un exemple de dérivation d'une fonction exponentielle en vidéo (Yvan Monka) : **https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o**

Exercice n°5 : Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{\frac{-x}{2}}$.
Déterminer les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°6 : *f* est la fonction définie sur par $f(x)=ae^{-x}+be^{-2x}$
où *a* et b sont deux réels. La courbe représentative de *f* passe par le point A(0;1) et la tangente à C_f en A est parallèle à l'axe des abscisses.
Déterminer les valeurs de *a* et *b*.

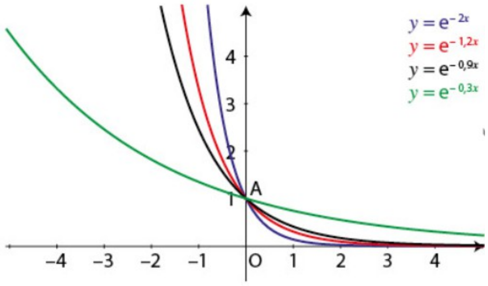


b) Cas particuliers : fonctions définies par $x \to e^{-kx}$ et $x \to e^{-kx^2}$

EXEMPLE 1 : Les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=e^{-kx}$ avec *k* nombre réel **strictement positif**.
Ainsi $f_k=e^u$ avec $u(x)=-kx$.
Ces fonctions sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f_k'(x)=-ke^{-kx}$, donc $f_k'(x)<0$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f_k'(x)$	$-$
$f_k(x)$	$+\infty$ ↘ 0

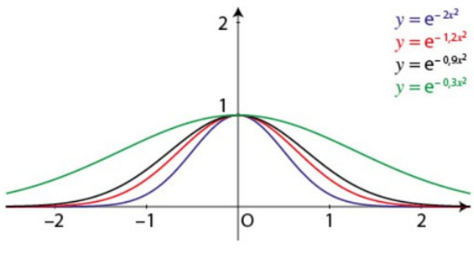
Pour tout $k>0$, les courbes représentatives des fonctions f_k passent par le point A(0 ; 1).



EXEMPLE 2 : Les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x)=e^{-kx^2}$ avec *k* nombre réel **strictement positif.**
Ainsi $g_k=e^u$ avec $u(x)=-kx^2$.
Ces fonctions sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $g_k'(x)=-2kxe^{-kx^2}$.
Donc $g_k'(x)$ a le même signe que $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'_k(x)$		+	0	$-$	
$g_k(x)$	0	↗	1	↘	0

Pour tout $k>0$, les courbes représentatives des fonctions g_k admettent l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
En effet, deux nombres réels opposés ont la même image par ces fonctions.



Source : manuel Hyperbole

Exercice 134 p 120