Correction du DST2

Exercice 1 Soit $z_1=1+i$ et $z_2=3-5\,\mathrm{i}$.

a) $(z_2)^2=-16-30\,i$ **b)** $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2-8i}{2}=-1-4i$

Exercice 2

Affirmation 1 : $i-i^2=i+1$ et $\overline{i+1}=1-i$ donc l'affirmation est vraie.

Affirmation 2 : On résout l'équation en isolant z

On a $2iz=3-i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{2i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$ donc l'affirmation est fausse.

Affirmation 3 : On pose $z=a+ib$

On a donc $Z=i(a+ib-a+ib)-4=-2b-4$

B étant un réel, Z est un réel et l'affirmation est fausse.

Exercice 3

Soit $z'=f(z)=\dfrac{z+3}{z-i}$ pour tout complexe $z\neq i$.

Le logiciel Xcas donne la partie réelle et la partie imaginaire de z' : vous n'avez donc pas à les chercher...

a. $z'=f(z)$ est un réel **si et seulement si** la partie imaginaire de z' est nulle.

$$\frac{(x+3)(-y+1)+xy}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow x-3y+3=0$$

$x-3y+3=0$ est l'équation cartésienne d'une droite.

$x^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ et $y=1$ donc $(x^2+(y-1)^2)\neq 0$ pour tout couple $(x;y)\neq(0;1)$

Le point A $(0;1)$ appartient à la droite d'équation $x-3y+3=0$

L'ensemble des points cherchés est donc la droite d'équation $x-3y+3=0$ privé du point A $(0;1)$

b. $z'=f(z)$ est un imaginaire pur **si et seulement si** la partie réelle de z' est nulle.

$$\frac{(x+3)x-y(-y+1)}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+3x+y^2-y=0 \text{ et } x^2+(y-1)^2\neq 0$$

$x^2+3x+y^2-y=(x+1,5)^2-2,25+(y-0,5)^2-0,25=(x+1,5)^2+(y-0,5)^2-2,5$.

C'est l'équation du cercle de centre $(-1,5;0,5)$ et de rayon $\sqrt{2,5}$.

Le point $(0;1)$ appartient à ce cercle.

L'ensemble des points cherchés est donc le cercle de centre $(-1,5;0,5)$ et de rayon $\sqrt{2,5}$ privé du point A.

Exercice 4 : *f* est la fonction définie sur $[½;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{2x-1}$.
Démontrer qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à $\mathscr{C}$ et qui passe par l'origine

La fonction *f* est dérivable sur I=] 0,5; $+\infty$ [et $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

En tout point d'abscisse $a>0,5$, C_f admet une tangente d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

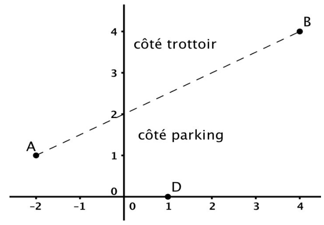
$y=f'(a)(x-a)+f(a) \Leftrightarrow y=f'(a)\times x-af'(a)+f(a)$ $m=f'(a)$ et $p=-af'(a)+f(a)$

Existe-t-il une valeur de a pour laquelle cette droite passe par l'origine du repère ?
Ce qui revient à chercher pour quelle(s) valeur(s) de a, $-a f'(a)+f(a)=0$.

On résout donc $-\dfrac{a}{\sqrt{2a-1}}+\sqrt{2a-1}=0$

La résolution de cette équation donne **une seule** valeur pour a : 1.

Bilan : il existe une droite et une seule qui est tangente à $\mathscr{C}$ et qui passe par l'origine ; c'est la droite Δ d'équation $y=x$.



<u>Exercice 5</u>

Dans le repère orthonormé ci-contre, on a noté $A(-2;1)$ et $B(4;4)$ les deux extrémités de la clôture et par $D(1;0)$ la position du détecteur de mouvement.

a. M est un point du segment [AB] d'abscisse x.

$DM=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

Il est demandé d'exprimer la distance DM en fonction de x. Il faut donc exprimer y en fonction de x.
Le point M appartient à la droite (AB).
L'équation de (AB) donne une relation entre les coordonnées de tous les points de cette droite...

Une équation de (AB) est $x-2y+4=0$ ce qui donne $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

On a donc $DM=\sqrt{1{,}25x^2+5}$.

b. f est la fonction définie sur $[-2;4]$ par $f(x)=\sqrt{1{,}25x^2+5}$

Pour tout réel x de $[-2;4]$, $1{,}25x^2+5>0$ comme somme de deux réels strictement positifs.

On a donc justifié que f est définie sur $[-2;4]$.

f est également dérivable sur $[-2;4]$ car elle ne s'annule jamais sur cet intervalle.

Pour tout x de $[-2;4]$, on a $f'(x)=\dfrac{1{,}25x}{\sqrt{1{,}25x^2+5}}$.

c. Sur $[-2;4]$, $f'(x)$ est du signe de $1{,}25x$ car le dénominateur est positif (comme toutes les racines carrées...).

x	-2		0		4
signe de f'		$-$		$+$	
f	$\sqrt{10}$ ↘		$\sqrt{5}$	↗	5

d. La fonction f étudiée représente cette distance DM. Sur [-2;4], la plus grande valeur est 5 qui correspond à la présence d'une personne au point B

Il faut donc régler le détecteur sur 5 m.

Complément : Pour être sûr de ne pas déclencher systématiquement le détecteur lorsque quelqu'un est sur le trottoir, il faudrait prendre la distance minimale soit $\sqrt{5}$ m≈2,24 m.