SUITES NUMÉRIQUES (I)
LIMITE D'UNE SUITE   Activité 1 page 9 (les écureuils)

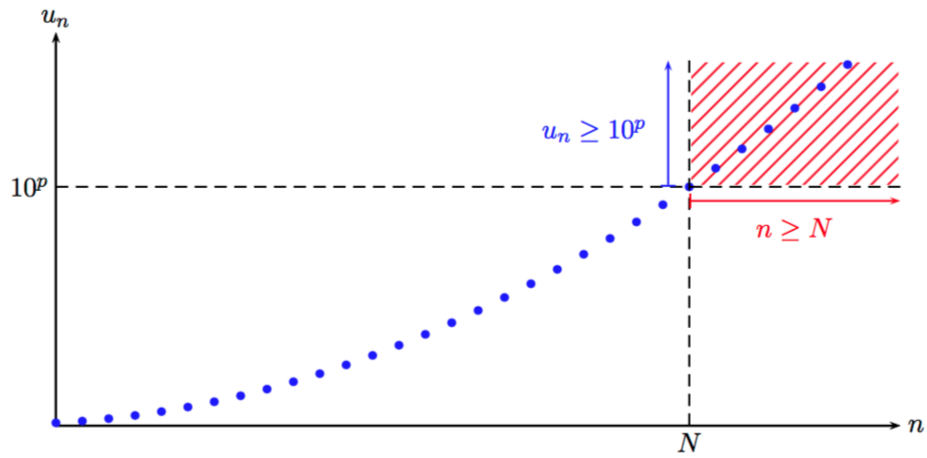
Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est étudier son comportement lorsque n prend de grandes valeurs.

On répond à la question posée par $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = ??$

A - Limite infinie

a. Définition : On dit qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à 10^p.

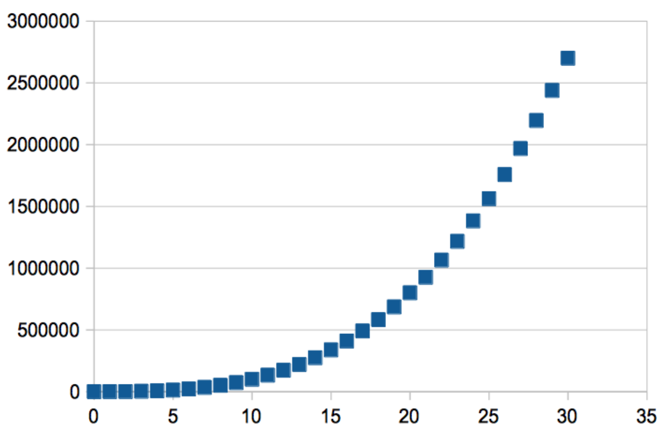
On écrit: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



Exemple ; soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = 100\,n^3 + 3\,n$

Le tableur et le nuage de points permettent de conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

n	Un
0	0
1	103
2	806
3	2 709
4	6 412
5	12 515
6	21 618
7	34 321
8	51 224
9	72 927
10	100 030
11	133 133
12	172 836
13	219 739
14	274 442
15	337 545
16	409 648
17	491 351
18	583 254
19	685 957
20	800 060
21	926 163
22	1 064 866
23	1 216 769
24	1 382 472
25	1 562 575
26	1 757 678
27	1 968 381
28	2 195 284
29	2 438 987
30	2 700 090



Il semble que quel que soit entier naturel *p*, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à 10^p. Pour avoir $u_N > 10^6$, il suffit de prendre $N = 22$.
On dit que 22 est le **SEUIL** au delà duquel TOUS les termes de la suite sont supérieurs à 10^6.

b. Recherche d'un seuil à partir duquel $u_n > 10^p$ où *p* est un entier naturel donné.

- À l'aide du tableur (calculatrice ou ordinateur)
- À l'aide d'un algorithme

On demande à la machine de calculer les termes de la suite et d'afficher le rang N pour lequel u_N dépasse la valeur choisie.
Autrement dit, TANT QUE u_n ne dépasse pas la valeur de 10^p, on calcule le terme suivant.

Exemple ; soit (u_n) la suite définie par $u_n = 100n^3 + 3n$

$n \leftarrow 0$ $U \leftarrow 0$ Tant que $U < 10^6$ $\quad n \leftarrow n+1$ $\quad U \leftarrow 100n^3 + 3n$ Fin Tant que Afficher n	on initialise n on initialise U Tant que la valeur de u_n ne dépasse pas 10^6, on calcule le terme suivant On affiche la 1ère valeur de n pour laquelle $u_n > 10^6$

Avec TI et Casio

$0 \rightarrow N$ $0 \rightarrow U$ While $U < 10^6$ $\quad N+1 \rightarrow N$ $\quad 100N^3 + 3N \rightarrow U$ End Disp N	$0 \rightarrow N$ $0 \rightarrow U$ While $U < 10^6$ $\quad N+1 \rightarrow N$ $\quad 100N^3 + 3N \rightarrow U$ WhileEnd N▶

Avec Python :

`N=0`
`U=0`
`while U<10**6:`
`  N=N+1`
`  U=100*N**3+3*N`
`print(N)`
	Boucle non bornée : **while condition :**
	instructions
	Tant que la condition n'est pas vérifiée, la boucle continue.
	
	En Python, il n'y a pas d'instruction de fin de boucle. c'est **l'indentation** (le décalage vers la droite) qui précise les instructions dans la boucle.

Exercices 5 à 16 page 21/22/23

Savoir faire 1 page 13

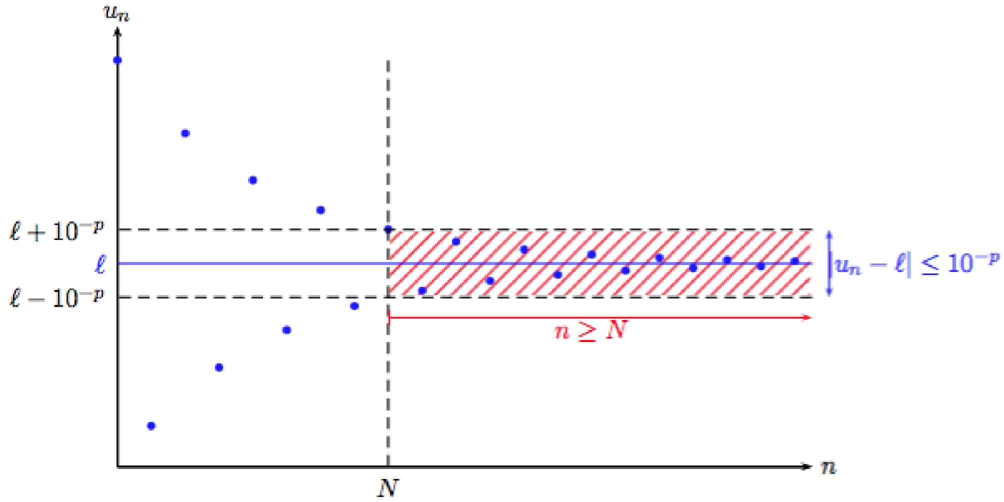
c. Limites de référence

Pour tout entier naturel non nul *k*, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

B - Limite finie

a. Définition : On dit qu'une suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes un sont à une distance de ℓ inférieure à 10^p .

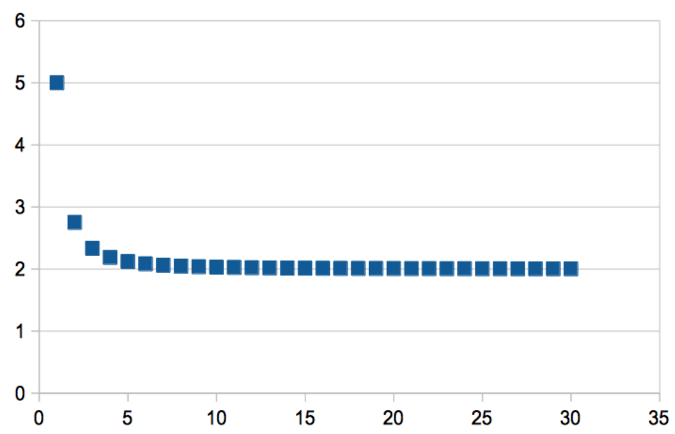
On écrit: $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.



Exemple ; soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = 2 + \frac{3}{n^2}$

Le tableur et le nuage de points permettent de conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

	A	B
1	n	U
2	1	5
3	2	2,75
4	3	2,33333333
5	4	2,1875
6	5	2,12
7	6	2,08333333
8	7	2,06122449
9	8	2,046875
10	9	2,037037037
11	10	2,03
12	11	2,02479339
13	12	2,02083333
14	13	2,01775148
15	14	2,01530612
16	15	2,01333333
17	16	2,01171875
18	17	2,01038062
19	18	2,00925926
20	19	2,00831025
21	20	2,0075
22	21	2,00680272
23	22	2,00619835
24	23	2,00567108
25	24	2,00520833
26	25	2,0048
27	26	2,00443787
28	27	2,00411523
29	28	2,00382653
30	29	2,00356718



b. Recherche d'un seuil à partir duquel $|u_n - l| < 10^p$ où *p* est un entier naturel donné.

- Avec le tableur on calcule $|U_n - 2|$

	A	B	C
1	n	U	abs(U-2)
2	1	5	3
3	2	2,75	0,75
4	3	2,33333333	0,33333333
5	4	2,1875	0,1875
6	5	2,12	0,12
7	6	2,08333333	0,08333333
8	7	2,06122449	0,06122449
9	8	2,046875	0,046875
10	9	2,037037037	0,037037037
11	10	2,03	0,03
12	11	2,02479339	0,02479339
13	12	2,02083333	0,02083333
14	13	2,01775148	0,01775148
15	14	2,01530612	0,01530612
16	15	2,01333333	0,01333333
17	16	2,01171875	0,01171875
18	17	2,01038062	0,01038062
19	18	2,00925926	0,00925926

À partir de $n = 18$, la différence entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-2}.

- Avec un algorithme

On demande à la machine de calculer les termes de la suite et d'afficher le rang N pour lequel $|U_N - 2|$ est inférieur à la valeur choisie.
Autrement dit, TANT QUE $|U_n - 2|$ dépasse la valeur de 10^{-p}, on calcule le terme suivant.

TI	Casio	Python

$1 \to N$
$5 \to U$
While $\lvert U-2 \rvert > 10^{-2}$
$N+1 \to N$
$2 + \frac{3}{N^2} \to U$
End
Disp N
	$1 \to N$
	$5 \to U$
	While $\lvert U-2 \rvert > 10^{-2}$
	$N+1 \to N$
	$2 + \frac{3}{N^2} \to U$
	WhileEnd
	N▶
		`N=1`
		`U=5`
		`while abs(U-2)>10**(-2):`
		`    N=N+1`
		`    U=2+3/N**2`
		`print(N)`

Exercices 17 à 28 page 23 à 26

Savoir faire 2 page 15

c. Limites de référence

Pour tout entier naturel non nul *k*, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = +\infty$

Une suite peut ne pas admettre de limite.

Exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1.
On dit que cette suite n'admet pas de limite.