Correction DST2

Exercice n°1 : Réponses : 1B ; 2C ; 3A ; 4C

Erreur dans les réponses proposées à la question1, il aurait fallu proposer :

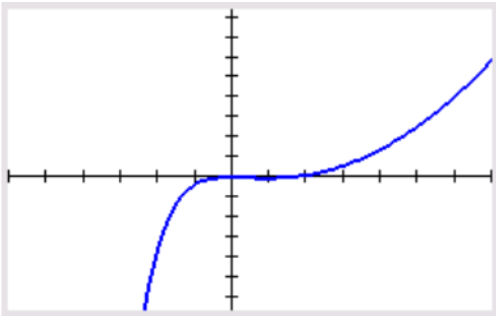
1. Pour tout réel x, l'expression $\dfrac{e^x - e}{e^x + 1}$ est égale à :

a) $\dfrac{1-e}{1+e}$ **b)** $\dfrac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+e^{-1}}$ **c)** $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **d)** $-e$

Exercice n°2 : On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{x}{e^x}$.

1. Graphiquement, sans « tricher », on conjecture :

- f croissante sur $[-3;3]$?
- $f(x) < 0$ sur $[-3;0]$ et $f(x) > 0$ sur $[0;3]$.



2. a. Résoudre dans ℝ l'inéquation $1 - e^{-x} \geq 0$.

$S = [0;+\infty[$

b. Montrer que, pour tout x, $f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$.

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{x}{e^x}$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 1 + \frac{e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = x - 1 + e^x \frac{1-x}{(e^x)^2} = x - 1 + \frac{1-x}{e^x}$$

$$= (x-1)\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = (x-1)(1-e^{-x})$$

c. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$.

Déterminer le signe de $f'(x)$, c'est déterminer le signe du produit $(x-1) \times (1-e^{-x})$

x	-3		0		1		3
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $1-e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		croissante		décroissante		croissante	

3. Les conjectures émises à la question 1 ne sont pas validées : f n'est pas monotone sur [-3;3].

Cet exercice avait pour but de vous inciter à toujours vous méfier de l'affichage de votre calculatrice : ne concluez pas trop vite, conjecturez puis prouvez votre conjecture.

Le but n'était pas de modifier les conjectures émises à la question 1 après avoir obtenu les variations de f !

Exercice n°3

a. Prouver que pour tout nombre complexe z non nul, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ Vu en classe

b. « Pour tout complexe z, $\Re e(z^2) = (\Re e(z))^2$ » ?

On pose $z = a + ib$; on a $\Re e(z) = a$ donc $(\Re e(z))^2 = a^2$

On a $z^2 = a^2 + 2iab - b^2$ donc $\Re e(z^2) = a^2 - b^2$

On peut donc conclure que l'affirmation est fausse.

Exercice n°4 Dans cet exercice, **les probabilités seront arrondies au centième**.

Parties A et B extraite de l'exercice n°1 du sujet donné en 2013 (Asie)

Lien vers la correction de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques d e l'Enseignement Public) : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Asie_S_juin_2013.pdf

Principale erreur relevée : Partie A, question 3, probabilité conditionnelle non repérée.

La phrase « On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides » devait être comprise comme « Sachant que la boîte prélevée présente des traces de pesticides »...

Attention, vous n'avez pas respecté la consigne de l'arrondi au centième.

Exercice n°5

Un sac contient 50 cartons bleus dont 25 portent le numéro 1 et les autres le numéro 2.
On ajoute dans ce sac 15 cartons jaunes numérotés 1.
On tire au hasard un carton de ce sac.
On note B l'événement « Le carton tiré est bleu » et U l'événement « Le carton tiré est numéroté 1 ».

1. les événements B et U sont-ils indépendants ?

Beaucoup d'entre vous ont complexifié les calculs...

Les cartons sont indiscernables au toucher, il y en a 65 au total et chaque carton a la probabilité 1/65 d'être tiré (situation d'équiprobabilité).

On a donc $p(\mathrm{B})=\dfrac{50}{65}$; $p(\mathrm{U})=\dfrac{40}{65}$

L'événement $\mathrm{B}\cap\mathrm{U}$ est « le carton tiré est bleu ET porte le numéro 1 ». Il y en a 25 avec chacun la probabilité 1/65 d'être tiré donc $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})=\dfrac{25}{65}$.

On a $p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{U})=\dfrac{50}{65}\times\dfrac{40}{65}\approx 0{,}47$ et $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})=\dfrac{25}{65}\approx 0{,}38$

$p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{U})\neq p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})$ donc les événements B et U ne sont pas indépendants.

Attention, vous ne pouvez pas conclure avec des calculs approchés...

2. Combien de cartons jaunes numérotés 2 faut-il ajouter dans ce sac pour que les événements B et U soient indépendants ?

Soit n le nombre de cartons jaunes numérotés 2 ajoutés. On a donc désormais :

- $65+n$ cartons en tout $25+n$ cartons numérotés 2 $15+n$ cartons jaunes
- 40 cartons numérotés 1   50 cartons bleus   25 cartons bleus et numérotés 1.

$p(\mathrm{B})=\dfrac{50}{65+n}$; $p(\mathrm{U})=\dfrac{40}{65+n}$ et $p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})=\dfrac{25}{65+n}$

On cherche la valeur de n telle que $p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{U})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{U})$.

On résout donc l'équation $\dfrac{25}{65+n}=\dfrac{50\times 40}{(65+n)^2}$

$$\frac{25}{65+n}=\frac{50\times 40}{(65+n)^2} \Leftrightarrow 25\times(65+n)^2-2000\times(65+n)=0 \Leftrightarrow (65+n)(25(65+n)-2000)=0$$

$$\Leftrightarrow 65+n=0 \text{ ou } 1625+25n-2000=0$$

n étant un entier positif, l'équation n'a qu'une seule solution $n=15$.