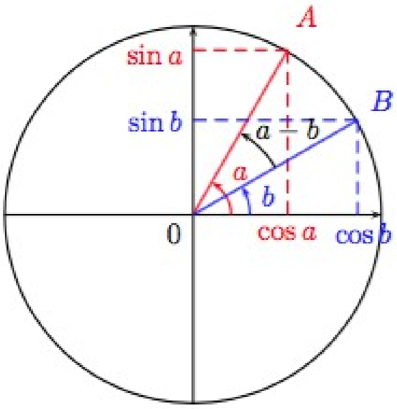
Formules d'addition et de duplication des sinus et des cosinus

I - Formules « d'addition » des sinus et cosinus

Soit $\mathcal{C}$, le cercle trigonométrique de centre O muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

$A\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ sont deux points de ce cercle.

On cherche un lien entre $\cos(a-b)$ et le cosinus et le sinus de a et de b.



On a d'une part :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = 1 \times 1 \times \cos(a-b)$

Et d'autre part :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = x_{\overrightarrow{OB}} \times x_{\overrightarrow{OA}} + y_{\overrightarrow{OB}} \times y_{\overrightarrow{OA}}$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos b \times \cos a + \sin b \times \sin a$

D'où :

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Pour tous réels a et b, on a

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\qquad$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ $\qquad$ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Moyen mnémotechnique... qui vaut ce qu'il vaut …

Le cosinus est casse-pieds, donc : il ne veut pas aller voir les sinus, il ne veut pas les laisser passer devant. il change les signes.	$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
Par contre, le sinus est sympathique, donc : il va à la rencontre des cosinus, il ne va pas toucher aux signes.	$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

Exemple d'application :

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

SF1 page 221 + Ex 7 à 12 page 232

II - Formules de duplication et de linéarisation

On choisit $a=b$ dans la formule d'addition $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

donc $\sin(a+a)=\sin(a)\cos(a)+\sin(a)\cos(a)$ d'où $\boxed{\sin(2a)=2\times\sin(a)\cos(a)}$

On choisit $a=b$ dans la formule $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

donc $\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)$ et $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

On a la relation $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ donc $\boxed{\cos(2a)=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1}$

Exemple d'application : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\frac{\pi}{3}=1-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-2\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

ou bien $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{3}-1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

Exercices 15 à 17 page 233