Probabilités (I) : Conditionnement et indépendance

Ω désigne l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire

Compétences	*Exercices corrigés*
Savoir construire un tableau ou un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. Savoir construire et exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.	*Savoir-faire 3 p 297 ;* *Savoir-faire 4 et 5 p 299* *43 p 306*
Savoir calculer $P_A(B)$, P(A∩B)	*Savoir-faire 1 et 2 p 297 ; 26 p 304*
Savoir déterminer et utiliser l'indépendance de deux événements.	*Savoir-faire 6 et 7 p 301 ; 56 p 308*
ROC : démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.	*Page 300*

Rappels des calculs de probabilité vus en seconde : https://www.youtube.com/watch?v=igHjos_glZM
1S : loi binomiale : voir le document sur le blog *Rappels 1S*

I. Probabilité conditionnelle

Introduction : Activité 1 p 294
Découvrir la notion de probabilité conditionnelle.

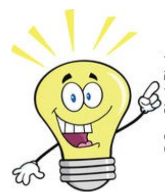
La connaissance d'une information sur une expérience peut modifier l'idée qu'on se fait de la probabilité d'un évènement. La probabilité qu'il pleuve aujourd'hui est supérieure si le ciel est nuageux.

Définition
On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A*, la probabilité que l'événement *B* se réalise sachant que l'événement *A* est réalisé. On la note : $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$

Propriétés : A et B sont deux événements de l'ensemble Ω avec $P(A)\neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A est définie par :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$0\leqslant P_A(B)\leqslant 1 \quad \text{et} \quad P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$$



Interprétation : Le fait de savoir que A est réalisé réduit l'ensemble des résultats possibles de Ω à A.
À partir de là, seules les éventualités de $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ont une importance.

Exemple : On lance deux dés cubiques équilibrés et on considère les événements suivants :
A : « Le 1^er^ dé affiche un 4 » et B : « La somme des deux dés vaut 8 ». Déterminer la probabilité $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$.

On calcule $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ avec $p(\mathrm{A})=\dfrac{1}{6}$; $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=(4;4)$

$$\text{donc } p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{36} \text{ d'où } \mathrm{P_A}(\mathrm{B})=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6} .$$

Il ne faut pas confondre P(A∩B) , $\mathrm{P_A}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{P_B}(\mathrm{A})$.

Il faut donc bien **savoir reconnaître une probabilité conditionnelle** dans un énoncé. Les expressions « sachant que... », « quand... », « lorsque... », « parmi... » sont souvent utilisées pour donner une probabilité conditionnelle. En effet, ces expressions annoncent que l'univers change, qu'il n'est qu'une partie de l'univers initial. C'est ce nouvel univers qui exprime le conditionnement et qui sera noté en indice. Pour s'entraîner : http://www.mathematiques.club/spip.php?article19

Dans la pratique, on connaît souvent des probabilités conditionnelles et on cherche des probabilités d'intersections.

Propriétés : Il résulte de la définition deux possibilités pour calculer P(A∩B) :

$P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)$ avec $P(A)\neq 0$

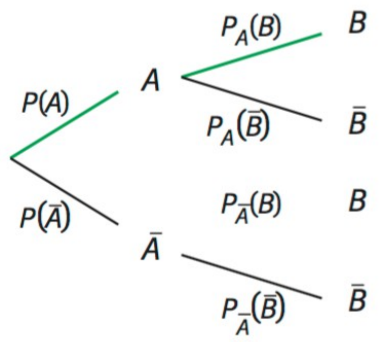
$P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$ avec $P(B)\neq 0$ *Preuve ....*

Ex : 1/ 2 / 4 / 5 p 302 ; Tableaux : 9 / 11/p 302 35 / 37 p 304

II Arbre pondéré et probabilités totales

Introduction : Activité 2 p 294

Traduire un énoncé en terme de probabilités. Calculer des probabilités.



Academie_en_ligne.fr

A et B sont deux événements d'un univers Ω tel que $p(\mathrm{B})\neq 0$

Chaque branche est affectée d'une probabilité d'où le nom d'arbre pondéré.

On peut lire les probabilités de chaque événements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles.

L'intersection de l'évènement $A\cap B$ est représentée en vert. Sa probabilité s'obtient en multipliant les probabilités sur les branches du chemin.

Règles de calculs dans un arbre de probabilité

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Formule des probabilités totales

Activité 3 p 295

Formule des probabilités totales : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Exercice : calculs de probabilités

Sujet Liban 2014, partie A : Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4 % des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'événement « *L'élève se rend au lycée à vélo* », B l'événement « *l'élève se rend au lycée en bus* » et R l'événement « *L'élève arrive en retard au lycée* ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'événement V ∩ R.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

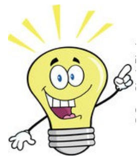
Exercices 13 / 14 p 303 41 p 305 44 / 45 / 46 p 306 Sujet A p 314

III Indépendance de deux événements

Activité 4 p 295 : intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation ou non de l'un des événements n'a pas d'incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre événement.

Définition : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits indépendants si, et seulement si, l'une des deux égalités est vérifiée : $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$.

Propriété : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si, et seulement si, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. *Preuve*



Propriété (ROC) : Si deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B, pour les événements $\overline{B}$ et A et pour les événements $\overline{B}$ et $\overline{A}$.

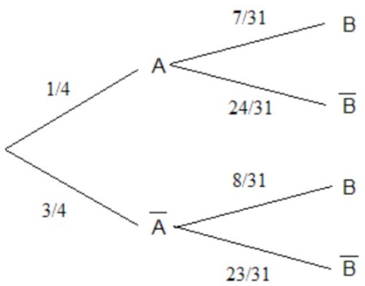
Preuve de $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$

On sait que $P(B\cap\overline{A})=P(B)\times P_B(\overline{A})$

Comme $P_B(A)+p_B(\overline{A})=1$ on a $p_B(\overline{A})=1-P_B(A)$

On a donc $P(B\cap\overline{A})=P(B)\times P_B(\overline{A})=p(B)\times(1-P_B(A))$; Or $P_B(A)=P(A)$ donc
$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\times(1-P(A))=P(B)\times P(\overline{A})$ donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exemple 1 : On tire au hasard, dans un jeu de 32 cartes non truqué, une carte, puis *sans la remettre*, une autre carte. Soit A l'événement « la première carte tirée est un coeur » et B l'événement « La seconde carte tirée est un coeur ». Les événement A et B sont-ils indépendants ?

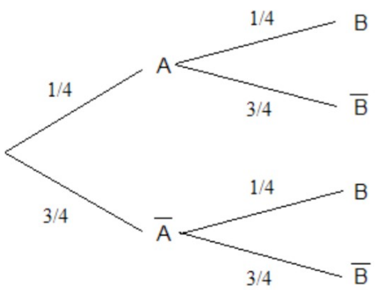


On a représenté ci-contre la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
A-t-on $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$?

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}\times\frac{7}{31}=\frac{7}{124}$ $\quad \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{4}$ $\quad \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}\times\frac{7}{31}+\frac{3}{4}\times\frac{8}{31}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq P(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exemple 2 : Cette fois on remet la carte n°1 piochée dans le jeu avant de piocher la 2ème carte.



$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ $\quad \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{4}$ et $p(\mathrm{B})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Ex 17 ; 18 ; 20 page 303 51 p 307 ; 57 ; 58 p 308 ; Sujet B ; D page 316 ; Sujet C page 315

Des exercices avec la correction : http://mathematiques.ac.free.fr/IMG/pdf/Exos_probas_condi_crorrige_TS.pdf

Ne pas confondre deux événements indépendants et deux événements disjoints.

A et B sont indépendants ssi $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

A et B sont disjoints ssi $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0$.