Suites Numériques (III) : limites des suites monotones

Compétences	*Exercices corrigés*
Savoir montrer qu'une suite est minorée, majorée	*Savoir-faire 8 p 21 ; 93 p28*
Savoir utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées	*Application 1* *Savoir-faire 9 p 21 ; 93 p28*

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

La suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite.

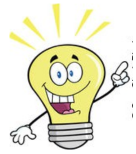
$\forall$ n a $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. M est un majorant de la suite

La suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m supérieur à tous les termes de la suite.

$\forall$ n a $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$ m est un minorant de la suite

La suite (u_n) est *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée.

$\forall$ n a $\mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$



Exemple 1 :

Soit (u_n) définie par $u_n = \sin(n)$.

$\forall$ n a $\mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc (u_n) est une suite minorée par -1 et majorée par 1 ; elle est donc bornée.

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2$.

$\forall$ n a $\mathbb{N}$, $n^2 \geqslant 0$ donc (u_n) est une suite minorée par 0. Par contre elle n'est pas majorée.

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$. $\forall$ n a $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ donc (u_n) est bornée.

Exercices 32 à 38 page 23 et 81 à 90 page 27

2. Théorème de convergence des suites monotones

Théorème (admis) : convergence d'une suite monotone

Si une suite est croissante **et** majorée alors elle est convergente.

Si une suite est décroissante **et** minorée alors elle est convergente.

Propriétés :

Si une suite est croissante et admet pour limite L alors elle est majorée par L.

Si une suite est décroissante et admet pour limite L alors elle est minorée par L.

Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} u_n$.

a) Montrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 2.

b) En déduire que (u_n) converge vers un réel L.

ATTENTION : vous avez montré que (u_n) converge et que sa limite L vérifie $\mathrm{L} \leqslant 2$.

Vous n'avez pas trouvé la limite de (u_n) . Le théorème du point fixe peut permettre de conclure.

Soit E un ensemble et *f* une fonction définie dans E. On dit que *x* est un point fixe de *f* si $f(x) = x$.

Théorème du point fixe (pas au programme) :

Soit *f* une fonction continue et (u_n) une suite récurrente définie par son 1er terme et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite finie *l* alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Autrement dit : si (u_n) converge vers *l* alors *l* est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Application à la détermination d'une limite

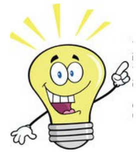
Suite de l'exercice 1 : la suite (u_n) converge vers une limite finie L, $L \leqslant 2$.

Pour tout entier n, $u_{n+1}=1+\frac{1}{2}u_n=f(u_n)$ avec f définie par $f(x)=1+\frac{1}{2}x$.

La fonction f est continue (c'est une fonction affine).

L est donc solution de l'équation $f(x)=x$ donc $L=1+\frac{1}{2}L$. On en déduit que $\frac{1}{2}L=1$ soit $L=2$.

2. Divergence des suites monotones



Propriété : Si une suite est croissante et non majorée alors elle a pour limite $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée alors elle a pour limite $-\infty$.

Preuve (ROC) dans le cas d'une suite croissante et non majorée

Pour tout réel A, on veut montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in]A;+\infty[$.

La suite n'est pas majorée donc il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$

La suite est croissante donc pour tout $n \geqslant p$, $u_n > u_p$.

On en déduit que : $u_n > u_p > A$ donc qu'à partir d'un rang p, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 2 : Montrer que la suite de terme général $u_n=n^2$ diverge vers $+\infty$.

La suite (u_n) est croissante et non majorée donc d'après la propriété précédente, elle diverge.

ex 39 à 41 page 23 et 91 à 95 page 28

Exercices 124 ; 125 page 37

Exercices pour réviser l'ensemble du chapitre sur les suites : http://homeomath2.imingo.net/qcmsuites.htm

Exercice 2 : Soit (v_n) la suite définie par $v_0=16$ et
pour tout entier n, $v_{n+1}=\sqrt{1+3v_n}$.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+3x}$.

b) Montrer par récurrence que (v_n) est décroissante et minorée par 0.

c) En déduire que (v_n) converge vers une limite L.

d) Déterminer la valeur exacte de L.

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite numérique (u_n)) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1) Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3) Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4) Pourquoi peut-on affirmer que la suite (v_n) converge ?

5) On note ℓ la limite de la suite (v_n).
On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1;0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
Déterminer la valeur de ℓ.

6) Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?