Correction succincte DM4

Exercice 1

On considère l'équation (E) : $z^3-(1-i)^2+(1-i)z+i=0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe $-i$ est solution de cette équation.

   Vérifions que $-\mathrm{i}$ est bien solution de (E)
   $(-\mathrm{i})^3-(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})^2+(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})+\mathrm{i}=\mathrm{i}+1-\mathrm{i}-\mathrm{i}-1+\mathrm{i}=0$
   Donc $-\mathrm{i}$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E).

2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

   $z^3-(1-i)^2+(1-i)z+i=0=(z+i)(az^2+bz+c)$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. Puisque $-\mathrm{i}$ est solution de (E) on peut factoriser le polynôme par $(z+\mathrm{i})$.
On cherche donc les nombres complexes a et b tels que :
$(z+\mathrm{i})\left(z^2+az+b\right)=z^3-(1-\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}$

$$\begin{aligned}(z+\mathrm{i})\left(z^2+az+b\right)&=z^3+az^2+bz+\mathrm{i}z^2+a\mathrm{i}z+b\mathrm{i}\\&=z^3+(a+\mathrm{i})z^2+(b+a\mathrm{i})z+b\mathrm{i}\end{aligned}$$

Par identification on a donc $a=-1$ et $b=1$
Ainsi $(E)\Leftrightarrow(z+\mathrm{i})\left(z^2-z+1\right)=0$
On considère l'équation $z^2-z+1=0$
$\Delta=-3<0$
Il y a donc deux solutions complexes :
$z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions de (E) sont donc $-\mathrm{i}$, $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

*** Question 1 formulée telle qu'elle l'était dans le sujet du bac :**
Montrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure.

1. Soit $y\in\mathbb{R}$ alors $\mathrm{i}y$ est un imaginaire pur.
Supposons que $\mathrm{i}y$ soit une solution de (E).
Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathrm{i}y \text{ solution de } (E)&\Leftrightarrow(\mathrm{i}y)^3-(1-\mathrm{i})(\mathrm{i}y)^2+(1-\mathrm{i})\mathrm{i}y+\mathrm{i}=0\\&\Leftrightarrow-\mathrm{i}y^3-(1-\mathrm{i})\times\left(-y^2\right)+\mathrm{i}y+y+\mathrm{i}=0\\&\Leftrightarrow-\mathrm{i}y^3+y^2-\mathrm{i}y^2+\mathrm{i}y+y+\mathrm{i}=0\\&\Leftrightarrow y^2+y+\mathrm{i}\left(1+y-y^2-y^3\right)=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}y(y+1)=0\\1+y-y^2-y^3=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\text{ ou }y=-1\\1+y-y^2-y^3=0\end{cases}\end{aligned}$$

0 n'est pas solution de l'équation $1+y-y^2-y^3=0$
-1 est solution de l'équation $1+y-y^2-y^3=0$.
Par conséquent la seule solution imaginaire pure possible est $-\mathrm{i}$

Vérifions que $-\mathrm{i}$ est bien solution de (E)
$(-\mathrm{i})^3-(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})^2+(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})+\mathrm{i}=\mathrm{i}+1-\mathrm{i}-\mathrm{i}-1+\mathrm{i}=0$
Donc $-\mathrm{i}$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E).

Exercice 2

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $z^4+4z^2+16=0$ d'inconnue z.

1. Justifier que si un complexe z est solution de (E_1) alors son conjugué $\bar{z}$ et son opposé $-z$ sont aussi solution de (E_1).

Si z est solution de (E1) alors $z^4+4z^2+16=0$

On veut montrer que $\bar{z}^4+4\bar{z}^2+16=0$

On a $\bar{z}^4+4\bar{z}^2+16=\overline{z^4}+4\overline{z^2}+\overline{16}=\overline{z^4+4z^2+16}$

et puisque $z^4+4z^2+16=0$ on a $\overline{z^4+4z^2+16}=\bar{0}=0$

donc Si z est solution de (E1) alors $\bar{z}$ est aussi solution de (E1).

Si z est solution de (E1) alors $z^4+4z^2+16=0$

On veut montrer que $(-z)^4+4(-z)^2+16=0$

$(-z)^4+4(-z)^2+16=z^4+4z^2+16$

et puisque $z^4+4z^2+16=0$ on a $(-z)^4+4(-z)^2+16=0$

donc Si z est solution de (E1) alors -z est aussi solution de (E1).

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $Z^2+4Z+16=0$

$\Delta=-48<0$ donc l'équation (E_2) a deux racines complexes conjuguées :

$$Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=-2-2i\sqrt{3} \text{ et } Z_2=\overline{Z_1}=-2+2i\sqrt{3}$$

3. On pose $a=1+i\sqrt{3}$.

a) Calculer a^2.

$a^2=(1+i\sqrt{3})^2=1+2i\sqrt{3}-3=-2+2i\sqrt{3}=Z_2$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_1).

1ère méthode

Pour déterminer les solutions de (E_1), il faut résoudre : $z^2=Z_1$ et $z^2=Z_2$

$z^2=Z_2$ © $z^2=-2-2i\sqrt{3}$ © $z^2=a^2$ © $z=a$ ou $z=-a$ ©

$z=1+i\sqrt{3}$ ou $z=-1-i\sqrt{3}$

et

$z^2=Z_1$ © $z^2=-2+2i\sqrt{3}$ © $z^2=(\bar{a})^2$ © $z=\bar{a}$ ou $z=-\bar{a}$ ©

$z=1-i\sqrt{3}$ ou $z=-1+i\sqrt{3}$

Rappel : vous n'avez défini $\sqrt{a}$ que pour *a*, réel positif...

Vous n'avez pas vu la définition d'une racine carrée d'un complexe.

2e méthode : on réinvestit la question 1 !

$a^2=-2+2i\sqrt{3}=Z_2$ donc a est **une** solution de (E1).

On a vu à la question 1) que :

Si a est solution de (E1) alors -a est aussi solution de (E1) donc $-a=-1-i\sqrt{3}$ est aussi une solution de (E_1) ;

Si a est solution de (E1) alors $\bar{a}$ est aussi solution de (E1) donc

$\bar{a}=1-i\sqrt{3}$ est aussi une solution de (E_1) ;

et $-\bar{a}=-1+i\sqrt{3}$ est aussi une solution de (E_1).

Autrement dit, si *a* est une solution de (E), alors $-a$, $\bar{a}$ et $-\bar{a}$ sont aussi des solutions de (E1)

Les **quatre** solutions de (E_1) sont : $1+i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$

.