Fonctions logarithmes

A - Fonction logarithme népérien

Activité (polycopié, extrait de Transmaths). Au début du XVII^e siècle, les navigateurs et les astronomes sont confrontés à des calculs compliqués (sans calculatrice, effectuer une multiplication peut vite être fastidieux). John Napier, en français Neper (1550-1617), publie une table à deux colonnes de sorte qu'au produit de 2 nombres à gauche corresponde la somme de 2 nombres à droite.

1. Définition

On appelle fonction logarithme népérien, l'unique fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ ayant pour dérivée la fonction $x \rightarrow \dfrac{1}{x}$ et vérifiant :

pour tous réels a et b strictement positif, $f(a\times b)=f(a)+f(b)$.

On note **ln** la fonction logarithme népérien.

Remarque n°1 : le logarithme népérien d'un nombre réel négatif ou nul n'existe pas...

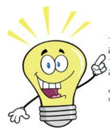
Propriété : $\mathbf{ln(1)=0}$

Preuve : on a pour tous réels a et b strictement positif, $f(a\times b)=f(a)+f(b)$.

Donc pour $a=b=1$, $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$ c'est-à-dire $f(1)=2f(1)$ d'où $f(1)=0$

Une autre façon de définir la fonction ln : $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ et $\ln(1)=0$ donc

la fonction $\ln$ est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.



2. Propriété algébriques

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif, alors :

Produit : $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$

Inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

Puissance et racine carrée : $\ln(a^n)=n\ln(a)$ et $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$

***Application 1* : transformer des écritures**

a) Écrire $\ln(24)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$\ln(24)=\ln(8\times 3)=\ln(8)+\ln(3)=\ln(2^3)+\ln(3)=3\ln(2)+\ln(3)$$

b) Écrire $\ln\left(\dfrac{25}{27}\right)$ en fonction de $\ln 5$ et $\ln 3$:

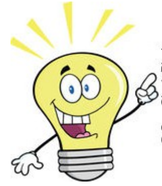
$$\ln\left(\frac{25}{27}\right)=\ln(25)-\ln(27)=\ln(5^2)-\ln(3^3)=2\ln 5-3\ln 3$$

c) Écrire $\ln\sqrt{48}$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$

$$\ln\sqrt{48}=\frac{1}{2}\times\ln 48=\frac{1}{2}\times\ln(16\times 3)=\frac{1}{2}\times\ln(2^4\times 3)=\frac{1}{2}(4\ln 2+\ln 3)$$

SF1 page 107 - Exercices 1 à 6 page 118

Application 2 **: résoudre une inéquation d'inconnue *n* de la forme $q^n \leqslant a$ ou $q^n \geqslant a$**
***n* est un entier naturel, *q* et *a* sont deux réels strictement positifs.**

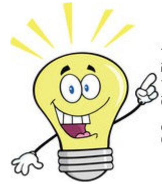


Exemple 1 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1,5^n \geqslant 2$

$1,5^n \geqslant 2$ équivaut à $\ln(1,5^n) \geqslant \ln(2)$ car la fonction $\ln$ est croissante sur $]0;+\infty[$

On a donc $1,5^n \geqslant 2 \Leftrightarrow \ln(1,5^n) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow n \times \ln(1,5) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1,5}$

$n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1,5} \approx 1,7$ et *n* est un entier donc les solutions sont tous les entiers à partir de 2.



Exemple 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $0,7^n \leqslant 0,1$

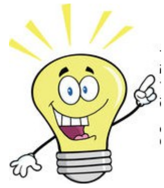
$0,7^n \leqslant 0,1$ équivaut à $\ln(0,7^n) \leqslant \ln(0,1)$ car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

On a donc $0,7^n \leqslant 0,1 \Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leqslant \ln(0,1) \Leftrightarrow n \times \ln(0,7) \leqslant \ln(0,1)$

On va diviser par $\ln(0,7)$ qui est négatif donc $n \geqslant \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)}$. $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \approx 6,5$ donc les solutions sont les entiers naturels inférieurs ou égaux à 6,5 soit 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

SF5 page 111 ; ex 37 à 40 page 120

3. Étude de la fonction logarithme népérien



Propriété : la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

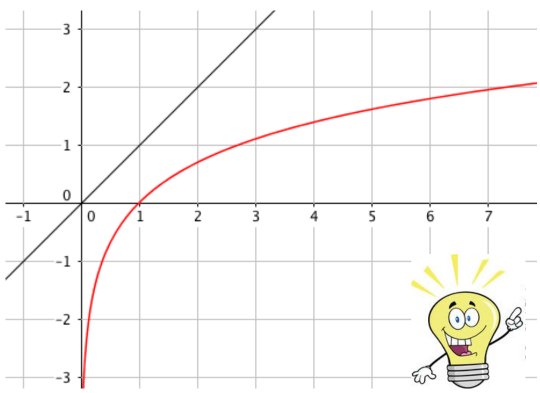
Preuve : par définition, la fonction $x \to \ln(x)$ est définie sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$. La dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Limites : on admet que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Bilan : la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction $\ln$.

Tableau de variations et représentation graphique :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$



Calculs de dérivées et de limites avec la fonction ln : SF2 et SF3 page 109 / Ex 7 à 18 page 118

Propriété : pour tout réel x tel que $0<x<1$, $\ln(x)<0$

pour tout réel $x>1$, $\ln(x)>0$.

4. Le nombre e

Propriété : il existe un unique réel, noté e, tel que $\ln \mathrm{e}=1$

$\mathrm{e}\approx 2,718$

Preuve : d'après le tableau de variations, l'équation $\ln(x)=1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$; on note e cette solution.

Exemple : simplifier l'écriture de $\mathrm{A}=3\ln(\mathrm{e}^2)$

$\mathrm{A}=3\ln(\mathrm{e}^2)=3\times 2\ln(\mathrm{e})=3\times 2\times 1=6$

Exercices 19 à 22 page 119

B - Fonction de la forme $x\rightarrow \ln(u(x))$ où u est une fonction définie sur $]0;+\infty[$

Propriété : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de I, $u(x)>0$

La fonction f définie par $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

la fonction $x\rightarrow \ln(u(x))$ est une primitive sur I de la fonction $x\rightarrow \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple 1 : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)$

$f(x)$ est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x)=x^2+1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

Exercices 41 à 44 page 120

Exemple 2 : Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3}{2x+5}$

$f(x)=\dfrac{3}{2x+5}=3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2x+5}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=2x+5$

Une primitive de f est donc $\mathrm{F}(x)=\dfrac{3}{2}\ln(2x+5)$

SF7 p 113 ; Exercices 60 à 69 page122

C - logarithme décimal

Propriété : on appelle logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par

$\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln 10}$. On a donc $\log(1)=0$ et $\log(10)=1$

$\log(10^n)=n$ où n est un entier relatif.

Voir Activité log / échelle logarithmique - Exercices 88 à 91 page 127