Limites liées à la fonction exponentielle

1. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Théorème (ROC)

On a les limites suivantes $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

Preuve de $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

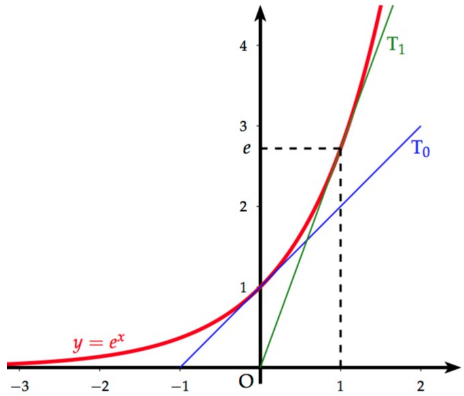
Idée : soit *f* la fonction définie par $f(x)=e^x-x$
Montrer que pour tout réel *x*, on a $e^x>x$.
Conclure grâce au théorème de comparaison.

Preuve de $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

Idée : Écrire $e^x=\frac{1}{e^{-x}}$, effectuer le changement de variable $X=-x$ et conclure.

Tableau de variation « complet » de la fonction exponentielle

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)=e^x$	$+$
variation de f	$0 \nearrow +\infty$

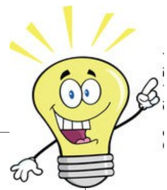


La droite d'équation $y=0$ est asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

2. D'autres limites à connaître, appelées limites de référence

Théorème 1 : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Preuve (taux d'accroissement)



Théorème 2 : « Théorème des croissances comparées »

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ **et** $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

Et plus généralement, pour tout entier $n>0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} x^n e^x=0$

Autrement dit, à l'infini la fonction exponentielle l'emporte sur les puissances.

Preuve de $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Idée : soit *f* la fonction définie par $e^x-\frac{x^2}{2}$

Montrer que pour tout réel *x*, on a $\frac{e^x}{x}>\frac{x}{2}$ puis conclure grâce au théorème de comparaison.

Preuve de $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$

Idée : effectuer le changement de variable $X=-x$.

Exercices 36 - 37 - 38 - 39 page 115 - 122 et 123 page 119 - 144 page 121 - sujets C et E page 128
Exercice 169 - 171 - 173 page 131