FONCTION EXPONENTIELLE

Activité d'introduction « Vers la fonction exponentielle »

I – Définition et propriétés

Pour tout réel a, ***il existe un nombre strictement positif unique*** b tel que $\ln(b)=a$.
On le note $b=\exp(a)$ et on le lit « exponentielle de a ».

Ainsi on a : $\ln(1)=0$ donc $1=\exp(0)$ $\qquad$ $\ln(e)=1$ donc $e=\exp(1)$

a. Définition :

La fonction exponentielle, notée **exp**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout nombre réel x associe le nombre strictement positif y tel que $\ln(y)=x$.

Pour tout réel x et tout réel $y>0$, , $y=\exp(x)$ équivaut à $x=\ln(y)$.

b. Relation fonctionnelle :

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

c. Notation : Pour tout entier relatif n, $\ln(e^n)=n\times\ln(e)=n$ donc $\exp(n)=e^n$

On convient donc d'écrire que pour tout réel x, $\exp(x)=e^x$

Pour tout réel x et tout réel $y>0$, , $y=e^x$ équivaut à $x=\ln(y)$.

Application : Passer de $\ln(x)=a$ à $x=e^a$ et réciproquement :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^x+4=0$.

$3e^x+4=0 \Leftrightarrow 3e^x=-4 \Leftrightarrow e^x=-\dfrac{4}{3}$

Or, pour tout réel x, $e^x>0$ donc l'équation $3e^x+4=0$ n'a pas de solutions.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^x=8$.

$2e^x=8 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln(4)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x-1\geqslant 0$ $\qquad$ l'inéquation $e^x-1>5$

$e^x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow e^x\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant 0$ $\qquad$ $e^x-1>5 \Leftrightarrow e^x>4 \Leftrightarrow x>\ln(4)$

SF1 page 135 + Exercices 1 à 11 page 146

d. Propriétés :

Pour tout réel a et tout réel b strictement positifs, on a :

- $e^a>0$
- $\ln b=a$ équivaut à $b=e^a$
- $\ln(e^a)=a$ et $e^{\ln b}=b$

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :

- $e^{x+y}=e^x\times e^y$
- $\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$
- $\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$
- $(e^x)^n=e^{n\times x}$

Exemples : $e^3\times e^7=e^{3+7}=e^{10}$ $\qquad$ $e^x\times e^5=e^{x+5}$ $\qquad$ $e^x\times e^{-3x}=e^{x-3x}=e^{-2x}$ $\qquad$ $e^{\ln 4+x}=e^{\ln 4}\times e^x=4e^x$

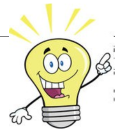
$e^{x-4}=\dfrac{e^x}{e^4}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{2x}}{e^{-3x}}=e^{2x+3x}=e^{5x}$ $\qquad$ $(e^x)^2=e^{2x}$ $\qquad$ $e^{-3x}=(e^x)^{-3}=\dfrac{1}{(e^x)^3}$

SF2 page 135 + Exercices 12 à 21 page 146

II – Étude de la fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe le réel e^x .

a- Dérivée et sens de variations



Propriété admise : la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, si $f(x)=\mathrm{e}^x$, alors $f'(x)=\mathrm{e}^x$.

On en déduit donc qu'une primitive de $f: x \rightarrow \mathrm{e}^x$ est $\mathrm{F}: x \rightarrow \mathrm{e}^x$

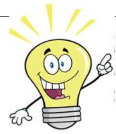
Pour tout réel x, e^x est strictement positif donc $f'(x)$ est strictement positif. On en déduit :

Propriété : la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Pour tous réels a et b, si $a<b$ alors $\mathrm{e}^a<\mathrm{e}^b$

SF3 page 137 et Exercices 22 à 35 page 147/148

b- Limites



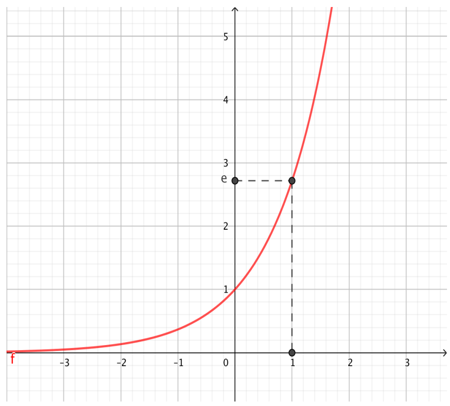
Propriétés : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

Interprétation graphique : Au voisinage de $-\infty$, l'axe des abscisses est asymptote à C_f .

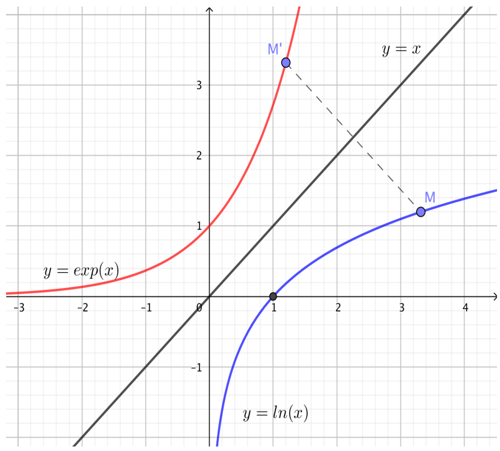
SF4 page 137 et Exercices 36 à 41 page 148

c- Tableau de variations et courbe représentative

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)=\mathrm{e}^x$	$+$
e^x	



Remarques : les courbes représentative des fonctions $x \rightarrow \ln(x)$ et $x \rightarrow \mathrm{e}^x$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.



La courbe représentative de la fonction exponentielle « monte plus vite » que la la droite représentant la fonction $x \rightarrow x$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

On admet $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$

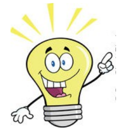
Et plus généralement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$ pour tout entier naturel n.

À l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.
À l'infini, toute puissance l'emporte sur le logarithme népérien.

SF5 + Ex 42 à 49 page 148

III - Fonctions de la forme e^u où *u* est une fonction définie sur un intervalle I

a. Propriété (admise)



Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times e^u$.

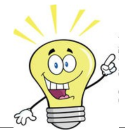
La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction *u*.

Exemple : soit *f* la fonction définie par $f(x)=e^{-3x+5}$.

f est de la forme e^u avec $u(x)=-3x+5$. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-3e^{-3x+5}$.

$f'(x)<0$ donc la fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. Propriété (admise)



Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

une primitive sur I de la fonction $f : x \to u'(x)e^{u(x)}$ est $\mathrm{F} : x \to e^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les primitives de la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(4x+6)e^{x^2+3x}$.

Si $u(x)=x^2+3x$ alors $u'(x)=2x+3$ et $h(x)=2u'(x)e^{u(x)}$

On en déduit que les primitives de *h* sont les fonctions H définies sur $\mathbb{R}$ par

$\mathrm{H}(x)=2e^{x^2+3x}+k$.

SF6 et SF7 page 141 + ex 50 à57 p 149 et 68 à 75 page 151

IV - Puissances d'exposants réels

- Si *n* est un entier naturel, la notation a^n a un sens pour tout réel a : $a^n=a\times a\times a\times\ldots\times a$ *n* fois ;

Ex : $2^3=2\times 2\times 2=8$

- Dans le cas où *n* est un entier négatif, la notation a^n a un sens pour tout réel a non nul : $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$:

Ex : $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

On se propose de donner un sens à la notation a^b quand *b* est un réel quelconque.

Définition : Soit *x* un réel et *a* un réel strictement positif.

a exposant *x* (ou *a* puissance *x*) est le réel noté a^x défini par : $a^x=e^{x\ln(a)}$

Ex : $2{,}5^{3{,}5}=e^{3{,}5\ln(2{,}5)}\approx 24{,}7$ au dixième près.

Attention, $(-3)^4$ existe mais $(-3)^{\frac{1}{4}}$ n'existe pas...

V - Les fonctions exponentielles de base *a*

Définition : Soit *a* un réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base *a* la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\exp_a(x)=a^x=e^x\ln(a)$

Cas particuliers :

- La fonction exponentielle de base 1, $\exp_1(x)=1^x$ est constante et vaut 1.
- La fonction exponentielle de base e, $\exp_e(x)=e^x$ est la fonction exponentielle déjà étudiée.