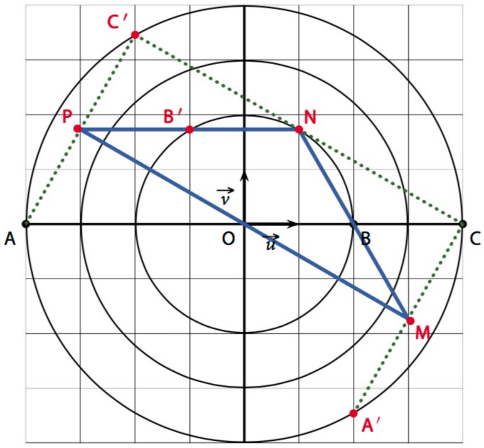
Nom :	**TS - DST n°4**	**23/01/2020**

Exercice 1 : Exercice 2, Pondichéry 2018

Une correction : https://www.freemaths.fr/annales-mathematiques/bac-s-mathematiques-inde-2018-specialite-corrige-exercice-2.pdf



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=-4$, $b=2$ et $c=4$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=ja$, $b'=jb$ et $c'=jc$ où j est le nombre complexe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de j.

b. En déduire les formes algébriques et exponentielles de a', b' et c'.

Beaucoup de temps perdu dans cette question pour déterminer la forme exponentielle. Il était inutile de recalculer les modules et arguments.

RAPPEL $e^{i\pi}=-1$ D'où $-4=4\times e^{i\pi}$

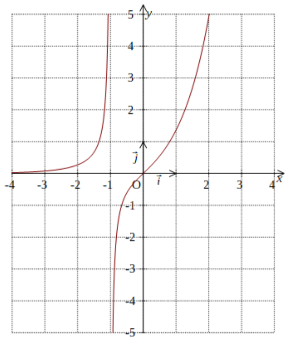
c. Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique ci-contre.
Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.
On cherche s'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{A'B'}}=k\times z_{\overrightarrow{A'C'}}$

3. On note M le milieu du segment [A'C], N le milieu du segment $[C'C]$ et P le milieu du segment [C′A].
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

On veut prouver que deux des côtés du triangles MNP ont même longueur.
On calcul donc les normes MN, MP et NP...

Exercice 2 sur 6,5 points



Pour les **questions 1 et 2**, on considère la fonction f définie sur $I=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ dont une représentation graphique est tracée dans le repère ci-dessous.
Les droites d'équation $x=-1$ et $y=0$ sont asymptotes à C_f.

On en déduit donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Question 1

a) La limite de f en $+\infty$ est égale à 2. On ne sait rien sur cette limite

b) La limite de f à gauche de -1 est égale à $+\infty$.

c) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ Faux car f est croissante sur]-1;+∞[

d) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$. Faux car la limite à gauche et la limite à droite en - 1 ne sont pas égales.

Question 2 : g est la fonction définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ pour tout réel x différent de -1 et de 0.

a) La limite de g en $-\infty$ est finie. En $-\infty$, *f(x)* tend vers 0 donc *g(x)* tend vers l'infini

b) La limite de g à droite en 0 est $-\infty$. En 0, à droite en 0, $f(0)=0^+$ donc *g(x)* tend vers $+\infty$

c) La limite de g à gauche en 0 est $-\infty$. En 0, à gauche en 0, $f(0)=0^-$ donc *g(x)* tend vers $-\infty$

d) La fonction g' est constante sur $]-1\,;+\infty[$. Faux car *f* est strictement croissante sur]-1;+∞[

Question 3 : La fonction h est définie pour tout x différent de -1 et 2 par : $h(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{x^3-3x-2}$

a) h n'est pas continue en 0 *h* est continue sur son ensemble de définition (fonction rationnelle)

b) La limite de h en $+\infty$ est égale à -1. En $+\infty$, $h(x)\approx\dfrac{2x^2}{x^3}$ qui a pour limite 0

c) La limite de h en $-\infty$ est égale à $+\infty$. En $-\infty$, $h(x)\approx\dfrac{2x^2}{x^3}$ qui a pour limite 0

d) La limite de h en $+\infty$ est égale à 0. En $+\infty$, $h(x)\approx\dfrac{2x^2}{x^3}$ qui a pour limite 0

Question 4 : Soit I l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et k la fonction définie sur I par $k(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

a) Il existe un réel x de I tel que $k(x)<0$ Faux, pour tout réel de I, $x+1\geqslant 1$ et $\mathrm{e}^x>0$

b) Pour tout réel x de I, $k(x)\geqslant 1$. L'étude des variations de *k* montre que *k* est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ avec $k(0)=1$.

c) Il existe un réel x de I tel que $k'(x)=0$. Faux, $k'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$ et pour tout réel de I, $f(x)>0$

d) k est décroissante sur I. Faux d'après c)

Affirmation 1 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x-x}=0$. VRAI

En $+\infty$, on a une FI au dénominateur...

Méthode : factoriser le dénominateur par x pour utiliser le cours : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=0$

Ainsi $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-x}=\dfrac{1}{x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right)}$ ...

Définition : soit *f* une fonction définie sur un ensemble I.
On dit que *f* est **paire** si pour tout x de I, on a : $-x\in\mathrm{I}$ et $f(-x)=f(x)$.

Affirmation 2 : La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ est paire. VRAI

- Pour tout x de ℝ, $-x\in\mathbb{R}$

- $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}+1}{\mathrm{e}^{-2x}+1}$ puis on multiplie numérateur et dénominateur par e^{2x} ...

Exercice 3 : Exercice 2 - Nouvelle Calédonie mars 2019

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Caledonie_mars_2019_DV_FH_2_.pdf

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-4}-2$.

Attention, $g(x)\neq(x+2)[\mathrm{e}^{x-4}-2]$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

On détermine la limite de $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x-4}$ puis celle de $g(x)$

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .

Il y a une forme indéterminée de la forme « $0\times\infty$ » .

Vous pouvez développer l'expression pour lever l'indétermination.

3. On admet que la fonction g est dérivable sur ℝ et on note g' sa dérivée.

Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.

4.a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur ℝ.

Attention, g n'est pas monotone sur ℝ , vous devez étudier l'existence de solutions sur les deux intervalles]-∞;-3[pui [-3 ; +-∞[

b. En déduire le signe de la fonction g sur ℝ.

5. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Respectez la précision demandée...

Partie B : Étude de la fonction *f* Il faudra sûrement utiliser ce qui a été prouvé dans la partie A

Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x)=x^2-x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur ℝ.

Trouver une solution évidente, c'est bien MAISil faut trouver TOUTES les solutions...

Rappel : on est sur ℝ donc x peut être nul, pas de division par x...

2. On admet que la fonction *f* est dérivable sur ℝ et on note f' sa fonction dérivée.

On admet aussi, pour tout réel x, $f'(x)=-x\,g(x)$ où la fonction **g est celle définie à la partie A.**

Étudier les variations de la fonction *f* sur ℝ.

On a $f'(x)=-x\,g(x)$ et on connait le signe de g...

3. Démontrer que le maximum de la fonction *f* sur [0 ; +∞[est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Un grand classique... revenir à la définition de α...

On sait que $g(\alpha)=0$ donc $(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}-2=0$ d'où $\mathrm{e}^{\alpha-4}=\dfrac{2}{\alpha+2}$

Le maximum est $f(\alpha)$ que l'on calcule en remplaçant $\mathrm{e}^{\alpha-4}$ par $\dfrac{2}{\alpha+2}$

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Georg Cantor (1845-1918)