Correction sujet A

Exercice n°1 :a) Exprimer $2\ln\left(\frac{1}{9}\right)-\ln(3\,e^{-2})$ en fonction de $\ln(3)$.

b) Montrer que $A=\ln(e^{3}\sqrt{e})$ est un nombre décimal.

c) Montrer que pour tout $x>0$, $\ln(e^{x}+3x)-x=\ln\left(1+3\frac{x}{e^{x}}\right)$

Exercice n°2 : Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x(\ln x)^{2}$.

a) Montrer que $f'(x)=(\ln x)(\ln x-2)$

b) Dresser le tableau de variation de *f* sur $]0;+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$; on admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$.

Exercice n°3 : Résoudre l'équation suivante après avoir déterminé l'ensemble de définition :
$\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(6)$.

Exercice n°1 : $2\ln\left(\frac{1}{9}\right)-\ln(3\,e^{-2})=2(\ln 1-\ln 3^{2})-(\ln 3+\ln e^{-2})=-6\ln 3-\ln 3+2=-7\ln 3+2$

$A=\ln(e^{3}\sqrt{e})=\ln(e^{3})+\ln(\sqrt{e})=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$ et 3,5 est un décimal.

Prouver une égalité, on part d'un des deux membres pour arriver au suivant :

Une façon : $\ln(e^{x}+3x)-x=\ln(e^{x}+3x)-\ln e^{x}=\ln\left(\frac{e^{x}+3x}{e^{x}}\right)=\ln\left(1+3\frac{x}{e^{x}}\right)$

Une autre : $\ln\left(1+3\frac{x}{e^{x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{x}+3x}{e^{x}}\right)=\ln(e^{x}+3x)-\ln e^{x}=\ln(e^{x}+3x)-x$

Exercice n°2 : on avait vu la veille la dérivée de $(\ln x)^{2}$ …

Rappel : $(u^{n})'=n\,u'\,u^{n-1}$ donc $((\ln x)^{2})'=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$

f est de la forme $u\times v$ …. on a $f'(x)=(\ln x)(\ln x+2)$, son signe dépend de celui de $\ln x$ et de $\ln x+2$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\ln x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de *f'*		$+$		$-$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Pour tout réel $x>0$, $f(x)\geqslant 0$ car la fonction admet pour minimum 0.

Exercice n°3 : $\ln(x+1)+\ln(x-4)$ existe si et seulement si $x>-1$ **ET** $x>4$.
On a donc $D_{f}=]4;+\infty[$
$\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(6)$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x+1)(x-4)=\ln 6$ $\Leftrightarrow$ $x^{2}-3x-10=0$
Cette équation du second degré a deux solutions : -2 et 5, seule 5 est dans D_{f}.
S={5}.

Attention, $\ln a+\ln b=\ln(a\times b)$ POUR TOUS RÉELS *a* et *b* POSITIFS.
Vous ne pouvez pas écrire $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ sans avoir déterminé l'ensemble de définition...

Contre exemple : pour $x=-3$, $\ln(x+1)(x-4)=\ln 14$ existe MAIS $\ln(x+1)+\ln(x-4)$ n'existe pas...

On n'a pas $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ pour tout réel *x*.

On a $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ uniquement pour $x>4$.

Correction sujet B

Exercice n°1 :a) Exprimer $3\ln\left(\frac{1}{4}\right)-\ln(2e^{-3})$ en fonction de $\ln(2)$.

b) Montrer que $A=\ln(e^4\sqrt{e})$ est un nombre décimal.

c) Montrer que pour tout $x>0$, $\ln(e^x+5x)-x=\ln\left(1+5\frac{x}{e^x}\right)$

Exercice n°2 : Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x(\ln x)^2$.

a) Montrer que $f'(x)=(\ln x-2)(\ln x)$

b) Dresser le tableau de variation de *f* sur $]0;+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$; on admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$.

Exercice n°3 : Résoudre l'équation suivante après avoir déterminé l'ensemble de définition :

$\ln(x-1)+\ln(x+4)=\ln(6)$

Exercice n°1 : $3\ln\left(\frac{1}{4}\right)-\ln(2e^{-3})=3(\ln 1-\ln 2^2)-(\ln 2+\ln e^{-3})=-6\ln 2-\ln 2+3=-7\ln 2+3$

$A=\ln(e^4\sqrt{e})=\ln(e^4)+\ln(\sqrt{e})=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5$ et 4,5 est un décimal.

Prouver une égalité, on part d'un des deux membres pour arriver au suivant :

Une façon : $\ln(e^x+5x)-x=\ln(e^x+5x)-\ln e^x=\ln\left(\frac{e^x+5x}{e^x}\right)=\ln\left(1+5\frac{x}{e^x}\right)$

Une autre : $\ln\left(1+5\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+5x}{e^x}\right)=\ln(e^x+5x)-\ln e^x=\ln(e^x+5x)-x$

Exercice n°2 : on avait vu la veille la dérivée de $(\ln x)^2$ …

Rappel : $(u^n)'=n\,u'\,u^{n-1}$ donc $((\ln x)^2)'=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$

f est de la forme $u\times v$ …. on a $f'(x)=(\ln x)(\ln x+2)$, son signe dépend de celui de $\ln x$ et de $\ln x+2$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\ln x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de *f'*		$+$		$-$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Pour tout réel $x>0$, $f(x)\geqslant 0$ car la fonction admet pour minimum 0.

Exercice n°3 : $\ln(x-1)+\ln(x+4)$ existe si et seulement si $x>1$ **ET** $x>-4$.

On a donc $D_f=]1;+\infty[$

$\ln(x-1)+\ln(x+4)=\ln(6) \Leftrightarrow \ln(x-1)(x+4)=\ln 6 \Leftrightarrow x^2-5x-10=0$

Cette équation du second degré a deux solutions : 2 et -5, seule 2 est dans D_f.

S={2}.

Attention, $\ln a+\ln b=\ln(a\times b)$ POUR TOUS RÉELS *a* et *b* POSITIFS.

Vous ne pouvez pas écrire $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ sans avoir déterminé l'ensemble de définition...

Contre exemple : pour $x=-3$, $\ln(x+1)(x-4)=\ln 14$ existe MAIS $\ln(x+1)+\ln(x-4)$ n'existe pas...

On n'a pas $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ pour tout réel x.

On a $\ln(x+1)+\ln(x-4)=\ln(x+1)(x-4)$ uniquement pour $x>4$.