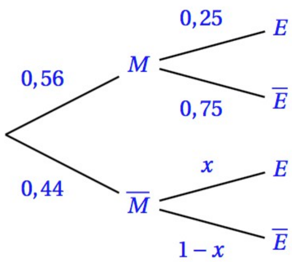
Correction bac blanc - février 2019

Exercice n°1 : Antilles, juin 2019 - exercice 4 , partie A
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Antilles_Guyane_juin_2019_VD.pdf

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.



2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

$p(M \cap E) = 0,56 \times 0,25 = 0,14.$

3. a. Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.

D'après la formule des probabilités totales, on a $P(E) = p(M \cap E) + p\left(\overline{M} \cap E\right) = 0,56 \times 0,25 + 0,44 \times x = 0,14 + 0,44x$.

b. En déduire la valeur de x.

D'après l'énoncé, on sait que $p(E) = 0,162$ car 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission.
On a donc

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \iff x = \frac{0,162 - 0,14}{0,44} = 0,05.$$

Ainsi, il y a 5 % des téléspectateurs ayant regardé l'émission sachant qu'ils n'ont pas regardé le match.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

On cherche $p_{\overline{E}}(M)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

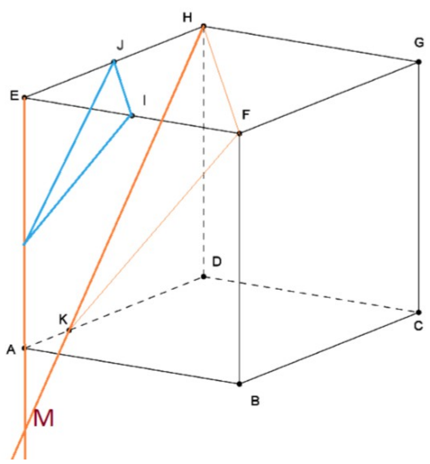
$$p_{\overline{E}}(M) = \frac{p\left(M \cap \overline{E}\right)}{p\left(\overline{E}\right)} = \frac{0,56 \times 0,75}{1 - 0,162} \approx 0,50.$$

Partie B : Exercice 4, Métropole 2019
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Metropole_21_JUIN_2019_JPG_3.pdf

Partie A

1. M est à l'intersection des droites (AE) et (HK) car ces deux droites non parallèles appartiennent au plan (ADH).

2.
- I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
- La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK).
- L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la face ABFE est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I.



Exercice n°2 : Antilles Guyane 2018 (exercice 4)
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Antilles_GS2018_Tolleron.pdf

Attention, erreur dans l'énoncé qui était le suivant :
Entre le 1er juin et le 31 octobre, ~~76~~ 80 cétacés arrivent dans la réserve.
On a bien alors $u_1=(3000+80)\times 0{,}95=2926$ et $u_{n+1}=(U_n+80)\times 0{,}95$.
Avec l'énoncé erroné, on aurait dû avoir $u_1=(3000+76)\times 0{,}95=2922{,}2$
et $u_{n+1}=(U_n+76)\times 0{,}95=0{,}95\,u_n+72{,}2$

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000+80, c'est-à-dire 3080. Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc :

$$u_1 = 3\,080 \times 0{,}95 = 2\,926.$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 76. \end{aligned}$$

3. Formule à entrer dans la cellule C2 : $\boxed{= 0.95\text{*}B2 + 76}$.

4. a. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.
   - **Initialisation**. On a $u_0 = 3\,000 \geqslant 1\,520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité.** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 1\,520$. Démontrons alors que $u_{n+1} \geqslant 1\,520$.
     Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1\,520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95 :
     $$0{,}95u_n \geqslant 0{,}95 \times 1\,520$$
     puis, en ajoutant membre à membre 76 :
     $$0{,}95u_n + 76 \geqslant 0{,}95 \times 1\,520 + 76$$
     ce qui équivaut à :
     $$u_{n+1} \geqslant 1520$$
     ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.
   - **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1\,520$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}95u_n + 76 - u_n \\ &= -0{,}05u_n + 76. \end{aligned}$$

   D'après la question précédente, $u_n \geqslant 1\,520$, donc $-0{,}05u_n \leqslant -0{,}05 \times 1\,520$, c'est-à-dire $-0{,}05u_n \leqslant -76$, par conséquent, $-0{,}05u_n + 76 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) est décroissante, minorée, elle est donc convergente.

5. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1520 \\ &= 0{,}95u_n - 1444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95(u_n - 1520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95.
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1480 \times 0{,}95^n$. Et comme $v_n = u_n - 1520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520.$$

c. $-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.

6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ⩾ 2000 :
    n ← n+1
    u ← 0,95 * u + 76
Fin de Tant que
```

Question 7 : précisez la méthode choisie avec au choix :
- Saisir l'algorithme et le faire tourner.
- Saisir la fonction $f : x \to 1480 \times 0{,}95^x + 1520$ et dans le tableur, avec un pas de 1, chercher la première valeur de x pour laquelle $f(x) > 2000$.

On trouve :

x	$f(x)$
21	2024>2000
22	1998,8<2000

Exercice 3 : Amérique du sud, novembre 2019
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Amertique_Sud_8_nov_2019_DV.pdf

1. a. On a $e^{-\frac{1}{4}\times 0} = 1$, donc $f(0) = 3\times 0\times 1 + 2 = 0+2 = 2$.

   b. On a 12 s $= \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ (min).
   On calcule $f(0{,}2) = 3\times 0{,}2e^{-\frac{1}{4}\times 0{,}2} + 2 = 0{,}6e^{-0{,}05} + 2 \approx 2 + 0{,}57 \approx 2{,}57$.
   Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.

   c. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{4}t} = 0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-0{,}25t} = 0$, donc finalement :
   $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$.
   Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à 2 μg/mL.

2. f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0\,;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
$$f'(t) = 3e^{-\frac{1}{4}t} + 3t\times\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{1}{4}t} = e^{-\frac{1}{4}t}\left(3-\frac{3}{4}t\right) = 3e^{-\frac{1}{4}t}\left(1-\frac{1}{4}t\right) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

Question 1c

Changement de variable $X = -\dfrac{1}{4}t$ d'où $t = -4X$ et quand t tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$.

On cherche donc $\lim\limits_{X\to-\infty} -12Xe^X + 2$ et sachant que $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$, on peut conclure.

Interprétation : $\lim\limits_{t\to\geqslant\infty} f(t) = 2$ donc au bout d'un temps assez long, le taux de vasopressine dans le sang va se stabiliser autour de 2 μ g/mL.

b. Sur l'intervalle $[t_0\,;4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_0) = 2{,}5$ et sur l'intervalle $[4\,;t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_1) = 2{,}5$.
On a donc $f(t) > 2{,}5$ sur l'intervalle $]t_0\,;t_1[$ ce qui signifie que le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1 - t_0 \approx 18{,}93 - 0{,}175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.

3. a. On sait que quel que soit le réel t, $e^{-\frac{1}{4}t} > 0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4-t$:
   - $4-t \iff 4 > t$;
   - $4-t \iff 4 < t$;
   - $4-t = 0 \iff 4 = t$.

   Conclusion : la fonction f est
   - croissante sur $[0;4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) = 3\times 4e^{-\frac{1}{4}\times 4} + 2 = 2 + 12e^{-1} \approx 6{,}41$;
   - décroissante sur $[4\,;+\infty[$ de $f(4) \approx 6{,}41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$.

   b. La fonction étant croissante sur $[0;4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) \approx 6{,}41$ puis décroissante sur $[4\,;+\infty[$, $f(4) = 2 + 12e^{-1} \approx 6{,}41$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;+\infty[$.

Question 3b : Pour $t = 4$, f' s'annule en changeant de signe donc *f* admet un extremum, un maximum ici.

Question 4
Pour appliquer le corollaire du TVI sur [0,4], trois conditions doivent être vérifiées :
- la continuité de la fonction sur [0,4] vrai car *f* est dérivable.
- la monotonie de *f* sur [0,4] on a montré que f est strictement croissante sur [0,4].
- le réel $k = 2{,}5$ doit appartenir à $[f(0); f(4)]$ vrai car $f(0) = 2 < 2{,}5$ et $f(4) \approx 6{,}4 > 2{,}5$

4. **a.** Sur l'intervalle $[0;4]$, la fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $f(0) = 2$ à $f(4) \approx 4,71$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $t_0 \in [0~;~4]$, tel que $f(t_0) = 2,5$.

La calculatrice donne :

$f(0) = 2$ et $f(1) \approx 4,33$, donc $0 < t_0 < 1$;

$f(0,1) \approx 2,29$ et $f(0,2) \approx 2,57$, donc $0,1 < t_0 < 0,2$;

$f(0,17) \approx 2,49$ et $f(0,18) \approx 2,52$, donc $0,17 < t_0 < 0,18$;

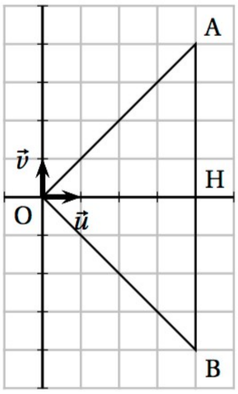
$f(0,174) \approx 2,499$ et $f(0,175) \approx 2,503$, donc $0,174 < t_0 < 0,175$.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4~;~+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

Exercice 4 : Nouvelle Calédonie mars 2019
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Caledonie_mars_2019_DV_FH_2_.pdf

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\left(z^2-8z+32\right)=0$.

- $z=0$ ou
- $z^2-8z+32=0$; $\Delta=(-8)^2-4\times1\times32=-64=-8^2$
  Cette équation a donc deux solutions
  $z_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{8+8\mathrm{i}}{2}=4+4\mathrm{i}$ et $z_2=4-4\mathrm{i}$.



Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire $\mathscr{A}=\dfrac{\text{OH}\times\text{AB}}{2}$
où H est le milieu de $[\text{AB}]$.
Le point H a pour affixe $\dfrac{z_1+z_2}{2}=4$ donc OH $=4$.
$\text{AB}=\left|(4+4\mathrm{i})-(4-4\mathrm{i})\right|=|8\mathrm{i}|=8$; donc $\mathscr{A}=\dfrac{4\times8}{2}=16$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient $|z-3|=|z+3|$.
Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 3 et -3.
$|z-3|=\text{MA}$ et $|z+3|=\text{MB}$; donc $|z-3|=|z+3| \iff \text{MA}=\text{MB}$.
L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc une droite, la médiatrice de $[\text{AB}]$.

Affirmation 2 fausse

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout n par : $z_n=\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n, O et M_{n+3} sont alignés.

On sait que $\left(\overrightarrow{\text{OM}_n},\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_{\text{M}_{n+3}}-z_\text{O}}{z_{\text{M}_n}-z_\text{O}}\right)$

donc $\left(\overrightarrow{\text{OM}_n},\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}\right)=\arg\left(\dfrac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{n+3}}{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n}\right)=\arg\left(\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3\right)=\arg(-8)=\pi\quad[2\pi]$.

On en déduit que les trois points M_n, O et M_{n+3} sont alignés.

Affirmation 3 vraie

Ne confondez pas le point M et son affixe z_M qui est un complexe et
le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ et le complexe $z_{\overrightarrow{\text{OM}}}$.

Une méthode : montrer que $Z_{\overrightarrow{\text{OM}_n}}=k\times Z_{\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}}$ on trouve $k=-8$

Autre méthode : déterminer l'angle entre $\overrightarrow{\text{OM}_n}$ et $\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}$ on trouve π.

4. Une étude statistique a établi qu'un client sur quatre pratique le surf.
Affirmation 4 : dans une télécabine accueillant 80 clients, la probabilité arrondie au millième qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est égale à 0,560.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes pratiquant le surf.
L'expérience aléatoire « on demande à un client dans la télécabine s'il pratique le surf » n'a que deux issues : oui ou non de paramètre 0,25. On répète cette expérience 80 fois de manière identique et indépendante. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n=80$ et $p=0,25$

$P(X=20)=\binom{80}{20}\times0,25^{20}\times0,75\times60=0,103$ arrondie au millième. **Affirmation fausse**