Calcul intégral : Partie 2
Primitives d'une fonction continue

La solution des applications et des exercices se trouvent sur la page 2, il n'y a aucun interêt à regarder la correction sans les avoir cherchés !

a) Théorème fondamental : Si f est une **fonction continue et positive** sur [a ; b], alors la fonction **F** définie sur [a ; b] par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [a ; b] et a pour dérivée f.
On a ainsi $F'(x)=f(x)$ pour tout x de [a ; b]. *Preuve page 168*

Exemple 1: Soit F la fonction définie sur I=[0;1] par F(x)= $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Déterminer son sens de variation sur I.

Solution : Sur $[0;x]$, la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ est continue et positive.
On sait donc que F est dérivable et que $F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$;
$\forall x\in[0;1]$, $F'(x)>0$ donc F est croissante sur [0 ; 1].

Application 1 : Étudier une fonction définie par une intégrale.

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par F(x) = $\int_0^x \frac{t}{2}\,dt$. Étudier les variations de F.

La correction en vidéo : https://youtu.be/6DHXw5TRzN4

À faire : Exercices du manuel : 49, 51 et 54 page 179

b) Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle ***primitive*** de f sur I, une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.
Ainsi pour tout x de I, $\mathbf{F'(x)=f(x)}$.

Exemple 2: Montrer que la fonction F définie sur ℝ par $F(x)=3x^2+1$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x)=6x$.

Solution : Si $F'=f$ alors F est une primitive de f.
F est dérivable et $F'(x)=6x=f(x)$ donc F est une primitive de f sur ℝ .

Exercice n°2 **:** Dans chacun des cas suivants, montrer que F est une primitive de f sur I.

a) $F(x)=x^2+2\sqrt{x}$; $f(x)=2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $I=]0;+\infty[$

b) $F(x)=\frac{2x-1}{3x-1}$; $f(x)=\frac{1}{(3x-1)^2}$ et $I=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

c) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-5}$; $f(x)=e^{2x-5}$ et $I=\mathbb{R}$.

d) $F(x)=\ln(2x)$; $f(x)=\frac{1}{x}$ et $I=]0;+\infty[$

Exercice n°3 : On considère la fonction définie sur ℝ par $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie sur ℝ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ soit une primitive de f.

À faire : exercices du manuel 14 ; 15 et 16 page 176

Correction des exercices et des applications

49 **1. a.** $F(2)$ représente l'aire sous la courbe représentative de la fonction inverse entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

b. $F(2) < F(3)$.

2. $F'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. a. F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

b. On justifie ainsi que $F(2) < F(3)$.

51 **1.** La fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t) = (\ln t)^2$ est continue, donc la fonction F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. $F'(x) = (\ln x)^2$.

b. F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

54 **1.** $F'(x) = \dfrac{x-4}{x^2+1}$.

2. F est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et croissante sur $[4\,;+\infty[$.

Exercice n°2

a) $F(x)=x^2+2\sqrt{x}$; $f(x)=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $I=]0;+\infty[$

On dérive F :

$$F'(x)=2x+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x+\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

b) $F(x)=\dfrac{2x-1}{3x-1}$; $f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ et $I=\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

F est du type u/v donc

$$F'(x)=\frac{2\times(3x-1)-3\times(2x-1)}{(3x-1)^2}=\frac{1}{(3x-1)^2}=f(x)$$

c) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-5}$; $f(x)=e^{2x-5}$ et $I=\mathbb{R}$.

F est du type e^u donc

$$F'(x)=\frac{1}{2}\times u'\times e^u=\frac{1}{2}\times 2\times e^{2x-5}=f(x)$$

d) $F(x)=\ln(2x)$; $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $I=]0;+\infty[$

F est du type ln(u) donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2}{2x}=f(x)$

Exercice n°3

On dérive $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$: C'est de la forme u×v :

$$F'(x)=(2ax+b)e^{-x}+(ax^2+bx+c)\times(-e^{-x})=[2ax+b-ax^2-bx-c]e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)]e^{-x}$$

On sait que F est une primitive de f donc $F'(x)=f(x)$,

On a donc $f(x)=(1-x^2)e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)]e^{-x}$

Par identification :

$$\begin{cases}-a=-1\\2a-b=0\\b-c=1\end{cases} © \begin{cases}a=1\\b=2a=2\\c=b-1=2-1=1\end{cases}$$ donc $F(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$.

14 $F'(x) = e^x + xe^x = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

15 $F'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

16 $F'(x) = \ln x + 1 = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.