Calcul intégral : Partie 3
Primitives d'une fonction continue

La solution des applications et des exercices se trouvent sur la page 2, il n'y a aucun interêt à regarder la correction sans les avoir cherchés.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

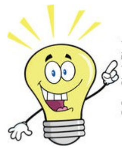
Preuve page 168

Théorème : Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I.

(1) Si *F* est une primitive de *f* sur un intervalle I, alors toutes les primitives de *f* sont les fonctions G définies sur I par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ où *k* est un réel.

(2) Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel.
Il existe une unique primitive de *f* qui prend en x_0 la valeur y_0.

(3) Si *k* est un nombre réel alors une primitive de *kf* est *k*F.



Preuves page 168

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ est une fonction continue donc elle admet des primitives mais celles ci ne possèdent pas de forme explicite.

Exemple :

a. Montrer que la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=x\ln(x)-x$ est UNE primitive de la fonction *ln* sur]0;+∞[.

b. En déduire l'expression de LA primitive de la fonction ln qui vaut 1 pour $x=1$.

Solution : **a.** Si $\mathrm{F}'(x)=\ln(x)$, alors F est bien une primitive de la fonction ln .

$\mathrm{F}(x)=x\ln(x)-x$ donc $\mathrm{F}'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$. F est donc UNE primitive de *f*.

b. Toutes les primitive G de *f* s'écrivent sous la forme $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ avec *k* une constante réelle.
On cherche LA primitive de ln telle que que $\mathrm{G}(1)=1$
$\mathrm{G}(1)=1 \Leftrightarrow \mathrm{F}(1)+k=1 \Leftrightarrow 1\times\ln(1)-1+k=1 \Leftrightarrow k=2$
On en déduit donc que LA primitive de ln qui vaut 1 en 1 est définie sur]0;+∞[par $\mathrm{G}(x)=x\ln(x)-x+2$.

Application 1 : Recherche d'une primitive particulière

Soit la fonction *f* définie sur ‘ * par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1. Montrer que la fonction F définie sur ℝ* par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$ est une primitive de *f* sur ℝ*.

2. Déterminer LA primitive de la fonction *f* qui s'annule en $x=1$.

Exercice : Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=6x^2+3x-2$

a. Montrer que la fonction F définie par $\mathrm{F}(x)=2x^3+1{,}5x^2-2x$ est une primitive de *f*.

b. Donner l'ensemble des primitives de *f* sur ℝ .

c. Déterminer la primitive G de *f* sur ℝ qui vérifie $\mathrm{G}(1)=0$.

Exercices à faire 57 page 179 et 60 ; 61 et 63 page 180

Correction des applications et des exercices

Application 1 : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Si $F'(x)=f(x)$, alors F est bien une primitive de la fonction *f*.

$F'(x)=\dfrac{2e^{2x}\times x-1\times e^{2x}}{x^2}=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}=f(x)$ donc F est bien une primitive de *f*.

2) F étant une primitive de *f*, toute autre primitive G de *f* sera de la forme $G(x)=F(x)+k=\dfrac{e^{2x}}{x^2}+k$, k réel

On veut que G s'annule pour $x=1$, donc $G(1)=0$

$G(1)=0 \Leftrightarrow F(1)+k=0 \Leftrightarrow e^2+k=0 \Leftrightarrow k=-e^2$

La primitive de *f* qui s'annule pour $x=1$ est $G(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2}-e^2$.

Exercice : Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=6x^2+3x-2$

a. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=2x^3+1{,}5x^2-2x$ est une primitive de *f*.

Solution : Si $F'(x)=f(x)$, alors F est bien une primitive de la fonction *f*.

$F'(x)=2\times 3x^2+1{,}5\times 2x-2=6x^2+3x-2=f(x)$ Donc F est bien une primitive de *f*.

b. F étant une primitive de *f*, toute autre primitive G de *f* sera de la forme $G(x)=F(x)+k=2x^3+1{,}5x^2-2+k$, avec k réel

c. On cherche la primitive G de *f* sur ℝ qui vérifie $G(1)=0$.

$G(1)=0 \Leftrightarrow 2\times 1^3+1{,}5\times 1^2-2+k=0 \Leftrightarrow k=-2-1{,}5+2=-1{,}5$

La primitive G de *f* sur ℝ qui vérifie $G(1)=0$ est donc $G(x)=2x^3+1{,}5x^2-3{,}5$

57 page 179

1. $F(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ donc $F'(x)=1\times\ln(x+1)+\dfrac{(x+1)\times 1}{x+1}-1=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)=f(x)$.

F est donc bien une primitive de *f*.

2. F étant une primitive de *f*, toute autre primitive G de *f* sera de la forme $G(x)=F(x)+k$.

$G(0)=0$ © $(0+1)\ln(0+1)-0+k=0$ © $\ln(1)+k=0$ © $k=0$.

Donc $G(x)=F(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ est la primitive qui s'annule en 0.

60 page 180

1. $F(x)=(\ln x)^2$ forme u^2 qui se dérive sous la forme : $(u^2)'=2\times u'\times u$.

donc $F'(x)=\dfrac{2\times 1}{x}\times\ln(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}=f(x)$ donc F est bien une primitive de *f*.

2. On cherche une primitive de $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. On remarque que $g=\dfrac{1}{2}f$.

D'après le 3) de la propriété, si k est un nombre réel alors une primitive de kf est kF donc une primitive de g est $\mathbf{G(x)=\dfrac{1}{2}F(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$.

61 page 180

61 **1.** $F'(x)=-e^{-3x}+(-3)\left(-x-\dfrac{1}{3}\right)e^{-3x}=3xe^{-3x}$.

Donc F est une primitive de f sur ℝ.

2. $G(x)=\dfrac{1}{3}\left(-x-\dfrac{1}{3}\right)e^{-3x}+\dfrac{4}{9}e^{-3}+2$.

63 page 180

$F(x)=(ax+b)e^{x+4}$ est une primitive de $f(x)=xe^{x+4}$

Donc $F'(x)=a\times e^{x+4}+(ax+b)e^{x+4}$

$=(ax+(a+b))e^{x+4}=f(x)$

Par identification $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ © $\begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \end{cases}$

donc $F(x)=(x-1)e^{x+4}$ est une primitive de