Calcul intégral : Partie 5
Recherche de primitives (Formules)

Opérations et fonctions composées : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction *f de la forme*	Une primitive *F*	Remarque
$u'u^n$; $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, $n\neq -1$ $\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ $-\dfrac{1}{u}$	Si $n\leqslant -2$, $u(x)\neq 0 \quad \forall\ x\in \mathrm{I}$ Cas particulier $n=-2$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0 \quad \forall\ x\in \mathrm{I}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0 \quad \forall\ x\in \mathrm{I}$
$u'e^u$	e^u	

Exemple 1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**b)** $g(x)=xe^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**c)** $h(x)=2(5-3x)^3$, $x\in\mathbb{R}$
Méthode : Pour déterminer une primitive : **1)** On recherche la forme de la fonction *f* (à une multiplication par une constante *k* près) ce qui permet d'avoir le type de la primitive F. On cherche si *f* est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; $nu'u^{n-1}$. ; $u'\mathrm{e}^u$ ...		
f est du type : $f=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+1>0$ et $u'(x)=2x$ Donc F est du type $\ln(u)$.	*g* est du type : $g=k_1\times u'e^u$ avec $u(x)=x^2$ et $u'(x)=2x$ donc G est du type $\mathrm{G}=k\times \mathrm{e}^u$	*h* est du type : $h=k_1\times u'u^3$ avec $u(x)=5-3x$ et $u'(x)=-3$ donc H est du type $\mathrm{H}=k\times u^4$.
2) On dérive cette forme de F avec la fonction *u* associée à notre exemple et on ajuste en multipliant F par une constante *k* pour obtenir exactement *f*.		
$(\ln(x^2+1))'=\dfrac{2x}{x^2+1}=f(x)$ et donc $\mathrm{F}(x)=\ln(x^2+1)+k$.	$(\mathrm{e}^{x^2})'=2x\times \mathrm{e}^{x^2}=2\times(xe^{x^2})=2\times f(x)$ donc $G(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+k$	$((5-3x)^4)'=4\times -3\times(5-3x)^3$ $=\ -6\times 2(5-3x)^3=-6\times h(x)$ donc $H(x)=\dfrac{-1}{6}(5-3x)^4+k$

Application 1 : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction *f* sur l'intervalle I :

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ **b)** $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}$ sur $\mathrm{I}=]0\ ;+\infty[$ **c)** $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ **e)** $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ **f)** $f(x)=\mathrm{e}^{4x+1}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

g) $f(x)=\dfrac{5}{2x-1}$ sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ **h)** $f(x)=\dfrac{x+2}{(x^2+4x)^3}$ sur $]0+\infty[$ **i)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0+\infty[$

Application 2 : On considère la fonction *f* définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-6}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer deux réels *a* et b tels que pour tout $x\in\ ]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2. En déduire une primitive F de *f* sur $]1;+\infty[$.

Exercices à faire : 12, 13 page 176 ; 67, 68, 69, 70 page 180

Il n'y a aucun interêt à regarder la correction sans les avoir cherchés.

Application 1 :

a) $f(x)=x^3-2x$ sur I=ℝ a pour primitive $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+k$

b) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}$ sur I=]0 ; +∞[Autre façon de voir : $f(x)=3x^2-3x^{-3}$

$(x^{-2})'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{3}\times\frac{-3}{x^3}$ donc *f* a pour primitive $F(x)=x^3+\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2}+k$

c) $f(x)=(2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I=\mathbb{R}$

f est du type $u'\times u^2$ avec $u(x)=x^2-5x+4$ et $u'(x)=2x-5$ donc F est du type $k_1\times u^3$

$((x^2-5x+4)^3)'=3\times(2x-5)(x^2-5x+4)=3\times f(x)$ donc $F(x)=\frac{1}{3}\times(x^2-5x+4)^3+k$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$: *f* est du type $k_1\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donc F est du type $k\times\sqrt{u}$ avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$

Rappel : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(\sqrt{x^2+1})'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$ donc $F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$

e) $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$: *f* est du type $k_1\times\frac{u'}{u}$ donc F est du type $k\times\ln(u)$ avec $u(x)=x^2+2$ et $u'(x)=2x$

__Rappel :__ $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $(\ln(x^2+2))'=\frac{2x}{x^2+2}=\frac{2}{3}\times\frac{3x}{x^2+2}=\frac{2}{3}\times f(x)$ donc $F(x)=\frac{3}{2}\times\ln(x^2+1)+k$

f) $f(x)=e^{4x+1}$; *f* est du type $k_1\times u'e^u$ donc F est du type $F=k\times e^u$ avec $u(x)=4x+1$ et $u'(x)=4$

$(e^{4x+1})'=4e^{4x+1}=4\times f(x)$ donc $F(x)=\frac{1}{4}\times e^{4x+1}+k$

En vidéo : correction d) et e) : ici et correction f) : ici
En vidéo :, g, h et i correction ici

g) $f(x)=\frac{5}{2x-1}$; *f* est du type $k_1\times\frac{u'}{u}$ donc F est du type $k\times\ln(u)$ avec $u(x)=2x-1$ et $u'(x)=2.$

$(\ln(2x-1))'=\frac{2}{2x-1}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{2x-1}=\frac{2}{5}\times f(x)$ d'où $F(x)=\frac{5}{2}\times\ln(2x-1)+k$

h) $f(x)=\frac{x+2}{(x^2+4x)^3}$; on peut l'écrire $f(x)=(x+2)(x^2+4x)^{-3}$

f est du type $k_1\times\frac{u'}{u^3}$ donc F est du type $k\times\frac{1}{u^2}$ avec $u(x)=x^2+4x$ et $u'(x)=2x+4$.

$((x^2+4x)^{-2})'=-2\times(x^2+4x)^{-2}\times(2x+4)=-2\times2\times\frac{x+2}{(x^2+4x)^2}$ donc $F(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+4x)^2}$

i) $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln(x)$: *f* est du type $k_1\times u'\times u$ donc F est du type $k\times u^2$ avec $u(x)=\ln(x)$. et $u'(x)=\frac{1}{x}$

$((\ln(x))^2)'=2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)=2\times f(x)$ donc $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+k$

Application 2 : En vidéo : correction ici

a) On obtient deux expressions pour $f(x)$: $f(x)=\frac{x-6}{(x-1)^2}=\frac{ax+(-a+b)}{(x-1)^2}$

Par identification, on a $\begin{cases} a=1 \\ -a+b=-6 \end{cases}$ © $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$ donc $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{(x-1)^2}$.

b) On sépare f en deux expressions :

$x \to \frac{1}{x-1}$ qui a pour primitive $\ln(x-1)$.

$x \to \frac{5}{(x-1)^2}$ est du type $k_1 \times \frac{u'}{u^2}$ qui a pour primitive $k \times \frac{1}{u}$ **Rappel :** $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

$\left(\frac{5}{x-1}\right)'=-\frac{5}{(x-1)^2}$ une primitive de $x \to \frac{5}{(x-1)^2}$ est donc $x \to -\frac{5}{x-1}$

Donc une primitive de f est $\mathrm{F}(x)=\ln(x-1)-\frac{5}{x-1}+k$.

12 **1.** $F(x)=e^{x^2}$ et $G(x)=e^{x^2-x}$. **2.** $F(x)=e^{x^2}-1$ et $G(x)=e^{x^2-x}-1$. **13** $F(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^4$ et $G(x)=\ln(x^2+1)$.	**67** $F(x)=3\ln(x^2+x+1)$, $G(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1}$ et $H(x)=-\frac{1}{4}(x^2+4)^{-2}$. **68** $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $G(x)=\ln(e^x+1)$ et $H(x)=4\sqrt{2x^2+1}$. **69** $F(x)=\frac{1}{12}(x^2+2x)^6$, $G(x)=\frac{3}{10}(x^2-5)^5$ et $H(x)=-\frac{1}{6}(x^2+1)^{-3}$. **70** Voir page 424.