Calcul intégral : Partie 6
Calcul d'une intégrale

Propriété : Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].

Si *F* est une primitive de la fonction *f*, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Remarque : cette propriété permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction *f* continue et positive grâce à une primitive de *f*.

Preuve p 172

***Exemple 1*:** *f* est définie par $f(x)=x^2$. Calculer l'aire sous la courbe de *f* entre 0 et 5.

La fonction *f* est positive sur $[0;5]$ donc l'aire sous la courbe de *f* entre 0 et 5 est $\int_0^5 x^2\mathrm{d}x$.

Une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est F définie par $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3$ donc $\int_0^5 x^2\mathrm{d}x=\mathrm{F}(5)-\mathrm{F}(0)=\frac{1}{3}\times 5^3-\frac{1}{3}\times 0=\frac{125}{3}$.

Calculer une intégrale avec la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY **Vidéo Casio** https://youtu.be/hHxmizmbY_k

Remarque : pensez à contrôler votre résultat avec la calculatrice MAIS vous devrez systématiquement détailler votre calcul et donner la valeur exacte.

Exemple 2 : Déterminer J= $\int_{-3}^{5} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

Solution : $\int_{-3}^{5} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(5)-\mathrm{F}(-3)$ avec $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

On a donc J= $\frac{1}{3}\times\mathrm{e}^{3\times 5}-\frac{1}{3}\times\mathrm{e}^{3\times -3}=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{15}-\mathrm{e}^{-9}) \approx 1\,089\,672$

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$\mathrm{A}=\int_2^5 (3x^2+4x-5)\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{B}=\int_{-1}^{1} (\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{C}=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes

$\mathrm{A}=\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{B}=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{6x^2+4x-1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{C}=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{D}=\int_1^4 \left(\frac{1}{3t}-\frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes

$\mathrm{A}=\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x}+\frac{6}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{B}=\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\quad \mathrm{C}=\int_0^4 \frac{3}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$

Exercices 17 et 18 page 176 et 79 ; 80 ; 81 ; 85 page 181/182

Une notation pratique pour préciser la primitive choisie : $\int_2^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_2^4$

Entre les crochets, on indique la valeur de la primitive choisie.

Correction des exercices et des applications

Exercice 1 :		
$A=\int_2^5 (3x^2+4x-5)\,dx$ $F(x)=x^3+2x^2-5x$ $A=F(5)-F(2)=\ldots=144$ correction en vidéo : ici	$B=\int_{-1}^1 (e^{-2x})\,dx$ $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$ $B=F(1)-F(-1)=\ldots=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}$ correction en vidéo : ici	$C=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$ $F(x)=\ln(e^x+3)$ $C=F(1)-F(0)=\ldots\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$ correction en vidéo : ici
Exercice 2 : ici	**Exercice 3 :** ici	

17 $I=\int_1^3 2\,dx=6-2=4$, $J=\int_1^3 2x\,dx=9-1=8$, $K=\int_1^3 x\,dx=4$ et $L=\int_1^2 3x^2\,dx=8-1=7$. **18** **1.** $F(x)=\ln x$. **2.** $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2$.	**79** $I=18$; $J=9$; $K=2\ln 3$. **80** $I=-3$; $J=0{,}5$; $K=e-e^{-1}$. **81** $I=\frac{3}{8}$; $J=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$; $K=\frac{1}{2}(e^4-e^1)$.
85 **1.** $2x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x-1)(x+1)+1}{x+1}=f(x)$. **2.** $F(x)=x^2-x+\ln(x+1)$. **3.** $\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)=\ln 2$.	