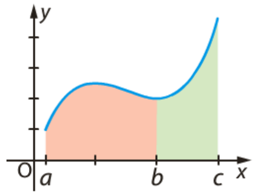
Calcul intégral : Partie 7
Propriété d'une intégrale

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues (on généralise) sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I et k un réel quelconque.

(1) $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ **(2)** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *(si on inverse les bornes, on change de signe)*

(3) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



(4) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(5) Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(6) Soit $a<b$, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de [a ; b], alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

(7) Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

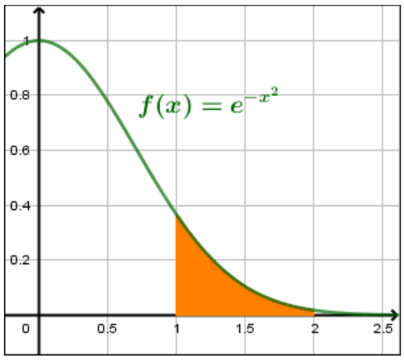
Preuves page 172

<u>Exemple 1 :</u> Utilisation des propriétés :

$$J=\int_0^1 2x^3+5x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x + \int_0^1 5x\,\mathrm{d}x \ (\textit{propriété 4}) = 2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + 5\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \ (\textit{propriété 3})$$

$$= 2\times\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + 5\times\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{4}-0\right)+5\times\left(\frac{1}{2}-0\right)=1{,}5.$$

Exemple 2 : Encadrer l'intégrale I = $\int_1^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.



On ne connaît pas de primitive à la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x^2}$ mais on peut obtenir un encadrement de I.

La fonction $f: x \to \mathrm{e}^{-x^2}$ est positive sur $[1;2]$ donc l'intégrale $\int_1^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est positive *(propriété 6)*. Interprétation graphique de cette intégrale : c'est **l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=2$.**

En premier, déterminons un encadrement de $f(x)$ sur $[1;2]$ *(cet encadrement est donnée dans l'énoncé)*.

Pout tout $x \geqslant 1$, on a $x^2 \geqslant x$ © $-x^2 \leqslant -x$.

Comme la fonction f est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, alors **pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.**

Comme pour tout x de $[1;2]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, en utilisant la propriété 7, on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_1^2 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x \ © \ 0 \leqslant I \leqslant \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x .$$

Or on connaît une primitive de $x \to \mathrm{e}^{-x}$ est $-\mathrm{e}^{-x}$ et $\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-1}$

On obtient donc **l'encadrement : $0 \leqslant I \leqslant \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$.**

Exercices à faire (avant les applications) : 20 – 21 – 25 – 26 – 27 page 176 et 94 – 95 page 182

Les applications suivantes utilisent des techniques dont vous aurez besoin dans les exercices type baccalauréat .

Application 1

1. Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 1$, $\frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$.

2. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, $1-\frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1$.

3. En déduire un encadrement de $\ln 2$. Vérifier la cohérence avec la calculatrice.

Application 2 : Suite et intégrale : 1er cas : les bornes de l'intégrale dépendent de *n*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n*, par $u_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

1. a) Justifier que la suite (u_n) n'a que des termes positifs.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante .

2. Justifier les trois affirmations suivantes :

i) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \leqslant 1$ *ii)* pour tout $n \geqslant 1$, $\int_1^n \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ *iii)* $\int_1^n \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = 1-\frac{1}{n}$

3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$ et en déduire que de la suite (u_n) converge.

Application 3 : Suite et intégrale : 2e cas : les bornes de l'intégrale ne dépendent pas de *n*

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1) Déterminer u_0.
2) Démontrer que (u_n) est décroissante.
3) Démontrer que (u_n) est convergente.
4) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
5) Que peut-on déduire ?

CORRECTIONS

20 $\int_{-4}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.

21 **1.** $I = \int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $J = \int_{-1}^{2} 3x^2\,\mathrm{d}x = 9$.

2. $K = 5I = 7{,}5$, $L = 4J = 36$ et $M = K + L = 43{,}5$.

25 **1.** $x^2 - 1$ est positif sur [1 ; 5].

2. Donc l'intégrale $\int_1^5 (x^2-1)\,\mathrm{d}x$ est positive.

94 **1. a.** Pour tout x de [0 ; 1], $x^2 \leqslant x$ donc $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x}$.

b. $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.

2. $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; or $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$

donc $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

95 **1.** Pour tout x de [1 ; 2], $0 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2$.

2. $0 \leqslant \int_1^2 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{7}{3}\ln 2$.

26 **1.** $\ln x$ est positif sur [1 ; 2].

2. Donc $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ est positif.

3. La calculatrice donne la valeur approchée 0,386 à 0,001 près par défaut.

27 **1.** Sur [– 4 ; 2] $f(x)$ est positif donc $\int_{-4}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est positif ; sur [2 ; 7] $f(x)$ est négatif donc $\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ est négatif.

2. Sur [1 ; 5], $-2 \leqslant f(x) \leqslant 3$ donc $-8 \leqslant \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 12$.

3. $\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or pour tout x de [2 ; 5], $f(x)$ est compris entre – 2 et 0 et pour tout x de [5 ; 7] $f(x)$ est compris entre – 2 et – 1 ; donc

$$-10 \leqslant \int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -2.$$

Application 1 la correction en vidéo : ici

1. Si $t\geqslant 1$ alors $t^2\geqslant t$ donc si $t\geqslant 1$ alors $t^2\geqslant t\geqslant 1$.

Par passage à l'inverse, on obtient : si $t\geqslant 1$ alors $\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant 1$.

2. Soit $x\geqslant 1$ alors pour tout $t\in[1;x]$, $\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant 1$ et $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^x 1\,\mathrm{d}x$ (propriété 7)

$\Leftrightarrow$ pour tout $x\geqslant 1$, $\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x\leqslant\left[\ln t\right]_1^x\leqslant\left[t\right]_1^x$ *on calcule la valeur des intégrales.*

$\Leftrightarrow$ pour tout $x\geqslant 1$, $1-\frac{1}{x}\leqslant\ln(x)\leqslant x-1$

3) Pour $x=2$, on obtient l'encadrement : $\frac{1}{2}\leqslant\ln(2)\leqslant 1$.

Application 2 la correction en vidéo : ici

1.a Pour tout entier *n*, $\frac{1}{1+x^2}>0$ sur $[0;n]$ donc l'intégrale $u_n=\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est positive pour tout entier *n*.

b) Étudier les variations de (u_n), c'est étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$:

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Astuce : on utilise la relation de Chasles *(propriété 5)* pour décomposer la 1ère intégrale et pouvoir simplifier.

On obtient $u_{n+1}-u_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\forall x\in[n;n+1]$, $\frac{1}{1+x^2}>0$ donc $\int_n^{n+1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x>0$ *(propriété 6)*

On a donc montré que $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

2i. $\forall x>0$, $1+x^2\geqslant 1$ donc $\forall x>0$, $\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$

On a donc $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[x\right]_0^1=1$

ii. $\forall x\geqslant 1$, $1+x^2\geqslant x^2>0$ donc $\forall x\geqslant 1$ $0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{x^2}$.

On a donc pour tout entier $n\geqslant 1$, $\int_1^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_1^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

iii. $\int_1^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=\frac{-1}{n}-(-1)=1-\frac{1}{n}$

3) Pour tout entier $n\geqslant 1$, $u_n=\int_0^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^n\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ d'après la relation de Chasles.

$$u_n\leqslant\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^n\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 1+1-\frac{1}{n}\leqslant 2-\frac{1}{n}$$

Pour tout entier $n\geqslant 1$, $0\leqslant u_n\leqslant 2-\frac{1}{n}<2$ donc (u_n) est majorée par 2.

(u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers L et $L\leqslant 2$.

Application 3 la correction en vidéo : ici

1. $u_0=\int_0^1 x^0 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^1 =-e^{-1}+e^0=1-\frac{1}{e}$

2. Étudier les variations de (u_n) , c'est étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}-x^n e^{-x})\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}(1-x)\,\mathrm{d}x$

Or sur $[0;1]$, la fonction $x\rightarrow x^n\mathrm{e}^{-x}(x-1)$ est négative donc $u_{n+1}-u_n<0$. Donc (u_n) est décroissante.

3. $\forall n\geqslant 0$, $u_n\geqslant 0$ donc (u_n) est minorée par 0.
La suite est donc décroissante et minorée donc elle est convergente vers une limite L telle que $\mathrm{L}\geqslant 0$.

4. $\forall x$ tel que $0\leqslant x\leqslant 1$, on a $0\geqslant -x\geqslant -1$ © $\mathrm{e}^0\geqslant \mathrm{e}^{-x}\geqslant \mathrm{e}^{-1}$ © $x^n\geqslant x^n\mathrm{e}^{-x}\geqslant x^n\mathrm{e}^{-1}\geqslant 0$

donc $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\geqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ © $0\leqslant u_n\leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

donc pour tout entier *n*, $0\leqslant u_n\leqslant \frac{1}{n+1}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.