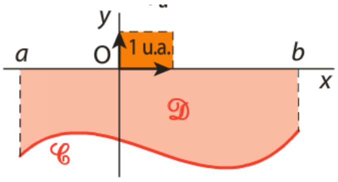
Calcul intégral : Partie 8
Calcul d'aires avec une intégrale

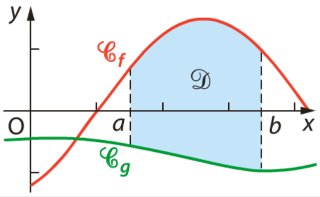
Propriétés

(1) Soit *f* une fonction continue et négative sur un intervalle $I=[a;b]$. C_f désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal et $\mathscr{D}$ est le domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Si $f\leqslant 0$ sur I alors $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$ = - aire ($\mathscr{D}$)



(2) C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions *f* et *g* continues sur un intervalle I ;

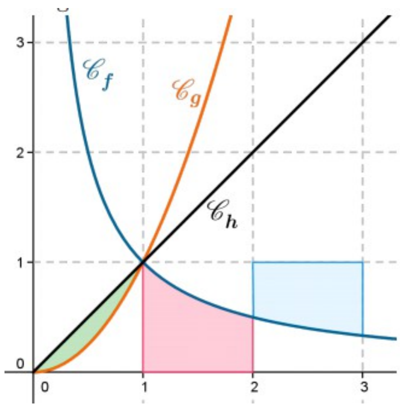


a et *b* sont deux nombres de I, $a<b$.

Si C_f est au dessus de C_g sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ entre les deux courbes sur $[a;b]$ est égale à aire ($\mathscr{D}$) = $\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$.

Exemple 1 : On a tracé la courbe de la fonction *f* définie sur]0; +∞[par $f(x)=\frac{1}{x}$.

On a tracé également les courbes des fonctions g et *h* définies sur [0; +∞[par $g(x)=x^2$ et $h(x)=x$.



Calcul de l'aire de la surface rose

C'est l'aire de la surface délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$, $x=2$ ce qui se traduit par l'intégrale : $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A_1 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2)-\ln(1)=\ln(2).$$

Calcul de l'aire de la surface verte

C'est l'aire de la surface entre les courbes C_f *et* C_g sur l'intervalle [0 ;1].
Sur cet intervalle, C_h est située au dessus de C_g donc :

$$A_2 = \int_0^1 h(x)-g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x-x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{3}\times 1\right)-0=\frac{1}{6}$$

Calcul de l'aire de la surface bleue

C'est l'aire de la surface délimitée par C_f, la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équation $x=2$ et $x=3$.

$$A_3 = \int_2^3 1-f(x)\,\mathrm{d}x = [x-\ln x]_2^3 = (3-\ln 3)-(2-\ln 2)=1-\ln 3+\ln 2=1+\ln\frac{2}{3}$$

Application 1 : fonction changeant de signe

Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x)=x^2-2x-3$.
On a tracé ci-contre sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Étudier le signe de $f(x)$.

2. En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=3$.

Application 2 : Aire entre deux courbes
Soit f et g deux fonctions définies sur ℝ par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x^2 - 4)(x+1)$.

1. Déterminer la position relative des deux courbes sur $[-2;2]$.

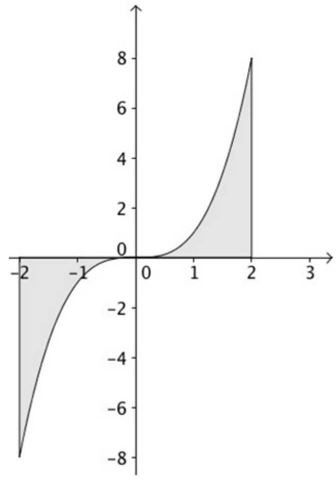
2. Déterminer l'aire, en u.a, du domaine compris entre les courbes C_f et C_g sur l'intervalle $[-2;2]$.

Méthode : pensez à tracer les courbes des fonctions avec votre calculatrice pour vérifier :
- le signe de la fonction à intégrer
- la position relative des deux courbes.

Remarque : Si une intégrale est nulle, la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Contre-exemple : $I = \int_{-2}^{2} x^3 \, dx$

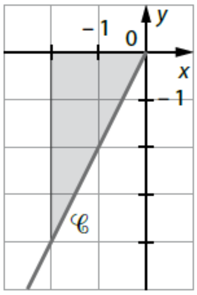
$$I = \int_{-2}^{2} x^3 \, dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = 4 - 4 = 0$$



Exercices 32 ; 34 à 35 page 177 puis 111 et 112 page 183

CORRECTION

32 **1.**

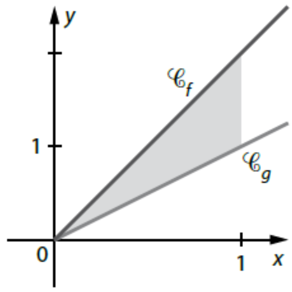


2. a. La fonction f est négative sur $[-2\,;0]$ donc l'aire, en unités d'aire, est égale à $-\int_{-2}^{0} 2x\,\mathrm{d}x = 4$.

b. L'aire est celle du triangle coloré, soit 4 carreaux donc 4 unités d'aire.

c. L'aire, en cm^2, est égale à 4 cm^2.

34 **1.**



2. a. Sur $[0\,;1]$, $f(x)$ est supérieur ou égal à $g(x)$ donc l'aire, en unités d'aire, de la surface donnée est égale à :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

b. On retrouve ce résultat en déterminant l'aire de deux triangles.

35 Voir livre page 424.

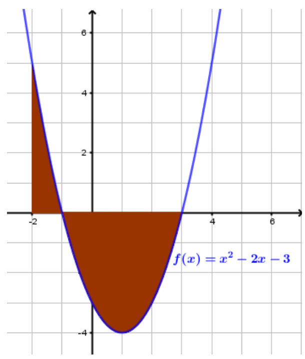
Application 1

1) $f(x)=x^2-2x-3 \quad =(x+1)\times(x-3)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		C_f au dessus de $(\mathrm{O}x)$		C_f au dessous de $(\mathrm{O}x)$		C_f au dessus de $(\mathrm{O}x)$	

2) On compte en négatif la partie de l'aire située au dessous de l'axe des abscisses.

$$\mathrm{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = 13$$

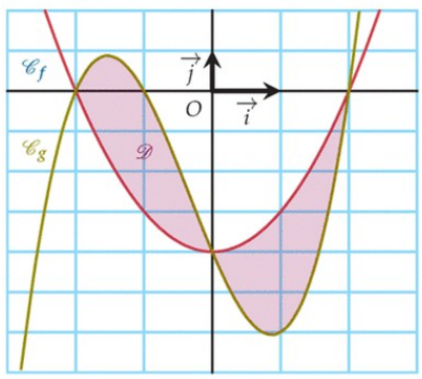


Application 2

1) On calcule la différence $f(x)-g(x) = x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$ et en factorisant, on a : $f(x)-g(x) = (x^2-4)(1-x-1) = -x(x^2-4)$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $I = [-2\,;2]$ en deux sous-intervalles $I_1 = [-2\,;0]$ et $I_2 = [0\,;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

2) Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 -x(x^2-4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.

D'une part, $\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 4$.

D'autre part, $\left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2} = \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4} = -4$.

Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 8$ u.a.