***Exercice* :** Soit la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=(\ln(x))^3-3\ln(x)$.

a. Déterminer les limites aux bornes de son intervalle de définition. Que peut on en déduire ?

Au voisinage de 0⁺, on a une FI « $-\infty+\infty$ »

$f(x)=\ln x\left[(\ln x)^2-3\right]$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2-3=+\infty$ donc par produit des limites, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

Au voisinage de $+\infty$, on a une FI « $+\infty-\infty$ »

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2-3=+\infty$ donc par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. Montrer que $f'(x)=\dfrac{3(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)}{x}$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

$f'(x)=3\times(\ln x)^2\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{x}\times(\ln(x)^2-1)=\dfrac{3(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)}{x}$

Sur]0 ; + ∞[, $f'(x)$ est du signe de $(\ln x-1)(\ln x+1)$ d'où le tableau de signe :

x	0		1/e		e		$+\infty$
signe de $\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

c. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1)=-3$ et $f(1)=0$

Donc T : $y=-3x+3$

d. Résoudre $f(x)=0$ puis construire C_f et T dans un repère.

$f(x)=(\ln(x))^3-3\ln(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \ln x\left[(\ln x)^2-3\right]=0 \;\Leftrightarrow\; \ln x=0$ ou $(\ln x)^2=3$

$\ln x=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$ et $(\ln x)^2=3 \;\Leftrightarrow\; \ln x=\sqrt{3}$ ou $\ln x=-\sqrt{3}$

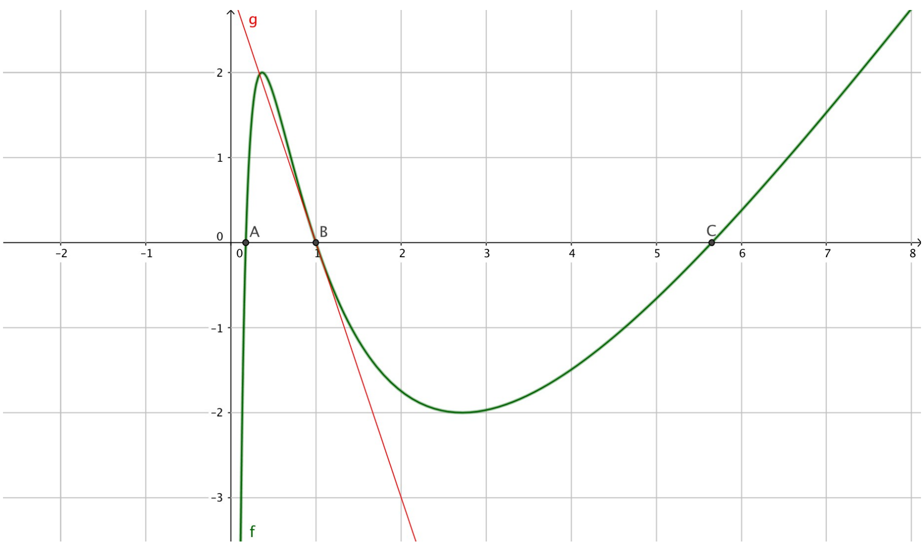
$\Leftrightarrow\; x=e^{\sqrt{3}}$ ou $x=e^{-\sqrt{3}}$

L'équation $f(x)=0$ admet donc trois solutions : 1 ; $e^{\sqrt{3}}$ et $-e^{\sqrt{3}}$.

Autrement dit C_f coupe trois fois l'axe des abscisses.

Figure réalisée avec *GeoGebra*

Pensez à vérifier vos résultats à l'aide de la calculatrice graphique.



Ex28 à 34 p 145 - 81 à 90 p 149

28 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

29 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

30 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

31 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

32 Voir livre page 423.

33 **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (e^x + \ln x) = -\infty$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^x = e^0 = 1$ comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} + \ln x) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} \dfrac{3}{1-\ln x} = +\infty$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} \ln x = \ln e = 1$ comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln x < 1$ pour $0 < x < e$.

d. $\lim\limits_{\substack{x\to e^2\\x>e^2}} \dfrac{x}{-2+\ln x} = +\infty$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to e^2\\x>e^2}} \ln x = \ln e^2 = 2$ comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln x > 2$ pour $x > e^2$.

34 **1.** $x \times \left(2 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 2x - \ln x = f(x)$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'après le cours donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2$$

et avec la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

81 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (2x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (-1+\ln x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} (2x+1) = 2e+1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} (-1+\ln x) = 0$ avec $-1+\ln x < 0$ pour $x < e$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x) = -\infty$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = e$ comme asymptote verticale.

82 **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

83 Voir livre page 424.

85 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 2\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{x} \times \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$.

86 **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x - \ln x}{x} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \dfrac{\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \left(\dfrac{\ln x}{x-1} \times \dfrac{1}{x+1}\right)$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \left(\frac{\ln((x-1)+1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}\right)$$

et par composition et d'après une limite du cours :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \left(\frac{\ln((x-1)+1)}{x-1}\right) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \left(\dfrac{\ln x}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x^2)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty$.

87 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1 + \dfrac{2}{\ln x}}{1 - \dfrac{1}{\ln x}}\right) = 1$.

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x}{\ln x} = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + (\ln x)^2}{1 - \ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{\ln x} + \ln x}{\dfrac{1}{\ln x} - 1} = -\infty$.

Exemple : On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

a) *f* est définie pour tout réel *x* tel que $\dfrac{x+2}{1-x}>0$. On a $D_f=]-2\,;1[$

b) Limite lorsque $x\to1$, $x<1$

On pose $X=\dfrac{x+2}{1-x}$ On a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} X=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=+\infty$

Limite lorsque $x\to-2$, $x>-2$

On pose $X=\dfrac{x+2}{1-x}$ On a $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} X=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\lim\limits_{X\to0} f(X)=-\infty$

c) Déterminer les variations de *f* c'est étudier le signe de $f'(x)$

$u(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$ et $u'(x)=\dfrac{3}{(1-x)^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3}{(1-x)^2}}{\dfrac{x+2}{1-x}}=\dfrac{3}{(1-x)(x+2)}$

$\forall x\in]-2\,;1[$ **,** $f'(x)>0$ donc *f* est strictement croissante sur $]-2\,;1[$.

Ex 35 à 38 p 145 - 91 à 95 p 149 - 97 p 150

35 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$.

2. $f'(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

3.

x	$-\infty$		2
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

36 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=-\infty$.

2. $f'(x)=\dfrac{2}{2x+6}=\dfrac{1}{x+3}$.

3.

x	-3		$+\infty$
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

37 Voir livre page 423.

38 **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-1}{x^2+x}$.

91 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3x+4)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$, donc, avec le théorème sur la limite des fonctions composées : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$-\frac{11}{4}$	↗	$+\infty$

92 **1.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x\times(x+1)-x^2\times1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2}{x+1}}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}\times\dfrac{x+1}{x^2}=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

93 Voir livre page 424.

94 **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-3x-4)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln X=\ln1=0$, comme la fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}\right)=0.$$

c. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\ln\left(\dfrac{1+2x}{1-x}\right)=+\infty$.

d. $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\dfrac{x+7}{9-x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$, donc, avec le théorème sur la limite des fonctions composées : $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\ln\left(\dfrac{x+7}{9-x^2}\right)=+\infty$.

95 **a.** $f'(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}$. **b.** $g'(x)=3\times\dfrac{2x}{x^2}+2x=\dfrac{6}{x}+2x$.

c. $h'(x)=2x-\dfrac{2}{1+2x}$. **d.** $k'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$.