CHAPITRE

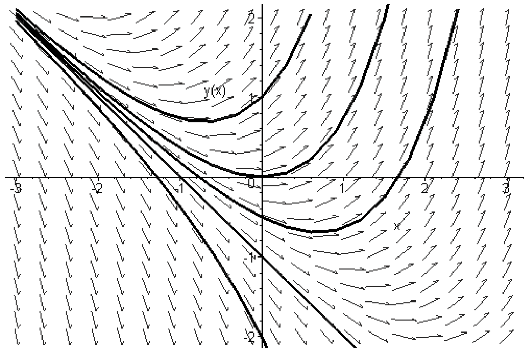
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Cours de Nathalie Daval, lycée Georges Brassens

Sommaire

Partie A

C'est au XVII^e siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparait la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Vers 1700, les méthodes classiques de résolution de certaines équations sont découvertes.
Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace...) et interviennent dans de nombreuses autre applications comme les sciences de la vie, l'astronomie, la biologie, les sciences économiques, les sciences physiques...



1 Introduction

Définition 1.

Une **équation différentielle** est une relation entre une variable réelle, une fonction qui dépend de cette variable et un certain nombre de ses dérivées successives.
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

Exemple 2
On cherche à résoudre l'équation différentielle $y'(x) = x^2$:

- on trouve $y(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ où c est une constante réelle ;
- on remarque qu'il y a une infinité de solutions, dépendantes de la constante c.

Si de plus on impose une contrainte du type $y(0) = 1$ (condition initiale), on obtient :

- $y(0) = \dfrac{0^3}{3} + c = c$. Or, $y(0) = 1$ donc, par identification, $c = 1$;
- on trouve $y(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$ et dans ce cas, la solution devient unique.

Remarque 3
Par la suite, on écrira la solution sous la forme $f(x) = \dots$, $g(x) = \dots$ plutôt que $y(x) = \dots$

Une fonction peut être dérivable plusieurs fois de suite : par exemple, une fonction f deux fois dérivable est une fonction pour laquelle la dérivée de la dérivée existe, on la note f'', ou y''.

SF1page 197 : tester si f est une solution d'une équation différentielle

SF1p 197
ex 1 à 5 page 205
ex 7 et 8 page 206

2 Équation différentielle du type $y' + ay = b$

2.1 Solution générale de l'équation $y' + ay = 0$

appelée équation linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient constant

Proriété 4.

On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

SF2 page 197
Résoudre...

SF2 p 197
Ex 9 à 16 p 206

Démonstration :
On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = 0$.

- Soit f la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$:
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -ak\,\mathrm{e}^{-ax}$ et
  $f'(x) + af(x) = -ak\,\mathrm{e}^{-ax} + ak\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$ donc, f est bien solution de (E).
- Les solutions de la forme $x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-ax}$ sont des solutions de (E). Il reste à montrer qu'il n'en existe pas d'autres. Pour cela, on considère une fonction quelconque g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) :
  soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.
  h est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $h'(x) = g'(x)\,\mathrm{e}^{ax} + ag(x)\,\mathrm{e}^{ax}$;
  soit $h'(x) = \mathrm{e}^{ax}\,(g'(x) + ag(x)) = 0$.

  g solution de (E) donc, $g' + ag = 0$

  On a alors : $h(x) = K \iff g(x)\,\mathrm{e}^{ax} = K \iff g(x) = K\,\mathrm{e}^{-ax}$.
  On a donc montré que toute fonction solution de (E) est nécessairement de la forme $x \mapsto K\,\mathrm{e}^{-ax}$, où K est un réel quelconque.

Exemple 5

- Résolution de l'équation différentielle : $y' - 3y = 0$:
  les solutions sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{3x}$ où k est un réel.
- Résolution de l'équation différentielle : $2y' = -5y$:
  cette équation peut s'écrire $y' + \dfrac{5}{2}y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}$.

2.2 Solution de l'équation $y' + ay = b$

SF3 page 199
Résoudre...

appelée équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

SF3 p 199
Ex 17 à 23 p 206

Proriété 6.

On considère l'équation $y' + ay = b$, où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels et où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple 7
On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 4$.
Les solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{4}{2} = k\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$.

2.3 Unicité de la solution sous condition initiale

SF4 p 199
Déterminer la solution...

SF4 page199
Ex 24 à 28 page 207

Proriété 8.

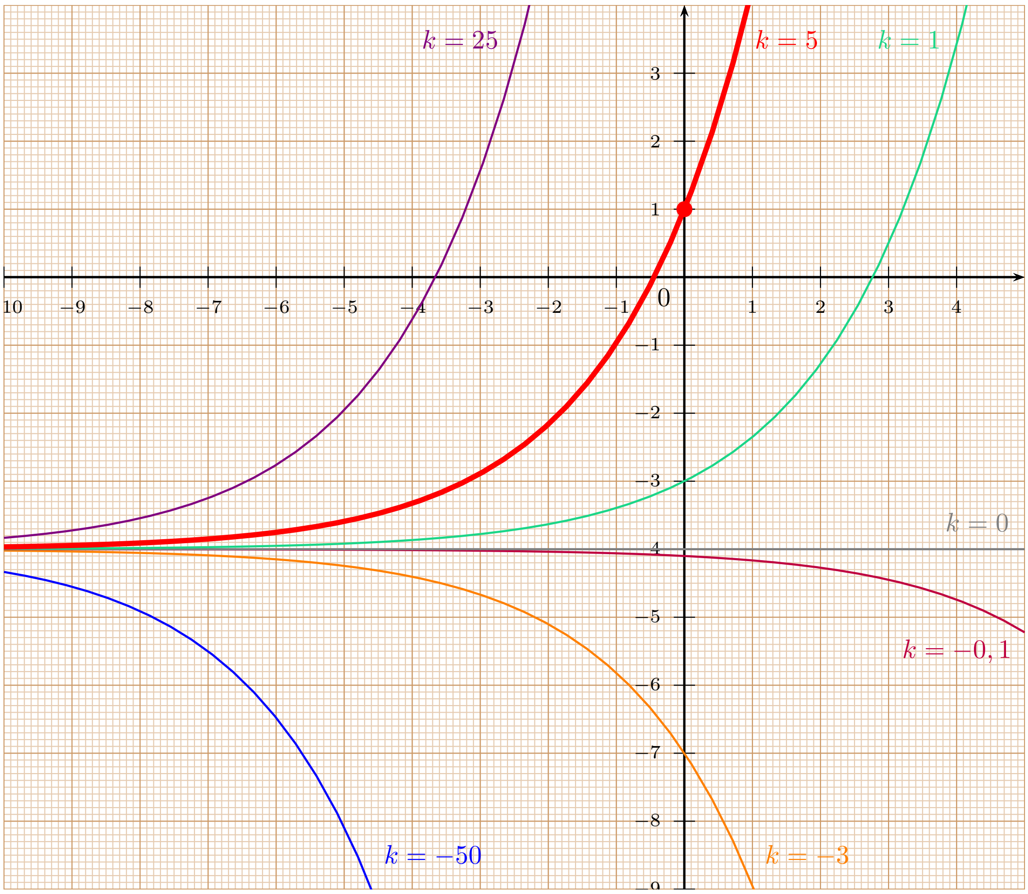
Soient x_0, y_0 et $a \neq 0$ des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = 0$ admet une **unique solution** f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple 9

Résolution de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{2}y = 2$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$:

wxMaxima :
`ode2('diff(y,x)-1/2*y=2,y,x)`

- les solutions de l'équation sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$ où k est une constante réelle.
- on obtient une infinité de solutions, en fonction de k, dont en voici quelques représentations graphiques :



- parmi toutes ces courbes, une seule passe par le point de coordonnées $(0, 1)$ correspondant à la condition $f(0) = 1$ (en rouge sur le graphique) :

$$f(0) = 1 \iff k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = 1$$
$$\iff k = 5$$

d'où $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4$.

wxMaxima :
`ic1(%,x=0, y=1)`
`% correspond à la dernière écriture`

Partie B

3 Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

3.1 Solution générale

appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant

Proriété 10.

On considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul et y une fonction de la variable x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple 11

- Résolution de l'équation différentielle (E_1) : $y'' + 4y = 0$:
  (E_1) s'écrit aussi $y'' + 2^2 y = 0$, on a donc $\omega = 2$.
  Les solutions sont du type $f(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$ où λ et μ sont des réels.
- Résolution de l'équation différentielle (E_2) : $27y'' + 3y = 0$:
  (E_2) s'écrit aussi $y'' + \frac{3}{27} y = 0$, ou encore $y'' + \left(\frac{1}{3}\right)^2 y = 0$, on a donc $\omega = \frac{1}{3}$.
  Les solutions sont du type $f(x) = \lambda \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \mu \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ où λ et μ sont des réels.

Remarque 12

Il peut arriver que, pour plus de facilité, on doive transformer l'écriture de la solution $f(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ en $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ou $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$. Pour cela, on utilisera les formules de trigonométrie suivantes :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b} \quad \textit{et} \quad \boxed{\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b}$$

Exemple 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3}$, on peut transformer f de manière à n'avoir que des cosinus ou des sinus :

- $$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}\right)$$

  $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$

  $$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{x}{3}\right)$$
  $$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right).$$

- $$f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}\right)$$

  $\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a+b)$

  $$= 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{x}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{x}{3}\right)$$
  $$= 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right).$$

3.2 Unicité de la solution sous condition initiale

Proriété 14.

en sciences physiques, on a classiquement la position et la vitesse à l'instant 0

L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ admet une **unique solution** f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque 15
On aura en général des conditions initiales du type : $\begin{cases} f(x_0) &= y_0 \\ f'(x_1) &= y_1 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} f(x_0) &= y_0 \\ f(x_1) &= y_1 \end{cases}$.

Exemple 16
On considère l'équation (E) : $4y''+\pi^2 y=0$ dont la solution vérifie les conditions initiales : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

- Résolution de l'équation différentielle générale :
  (E) $\Longleftrightarrow y''+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 y=0$; les solutions sont donc : $f(x)=\lambda\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+\mu\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.
- Utilisation de la première condition :
  $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lambda\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mu\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\lambda\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mu\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\mu)$.
  Sachant que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient $\lambda+\mu=1$.
- Utilisation de la seconde condition :
  $f'(x)=-\dfrac{\pi}{2}\lambda\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+\dfrac{\pi}{2}\mu\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.
  $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\lambda\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{2}\mu\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\lambda\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{2}\mu\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}(-\lambda+\mu)$.
  Sachant que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, on obtient $-\lambda+\mu=0$.
- Résolution du système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda+\mu &= 1 \\ -\lambda+\mu &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu &= 1 \\ 2\mu &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda &= \dfrac{1}{2} \\ \mu &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Conclusion : $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.