

DM à rendre le 27/03/2020

Rendre un PDF dans le casier ATRIUM en priorité.

Conseil : avoir réviser la leçon sur exp et calcul intégral

Avoir une copie, un brouillon, pas de téléphone

Durée : 45 minutes

J'indique quelques points de méthode en rouge.

**EXERCICE 3**

**6 points**

Une société d'extraction de gravier reçoit une commande de 550 000 tonnes de gravier pour la construction d'un tronçon d'autoroute. Pour satisfaire cette commande, elle exploite un nouveau gisement de pierre.

Le responsable a recensé les masses journalières de gravier extraites de ce gisement au cours de son exploitation. La tendance observée et son expérience professionnelle le conduisent à modéliser la masse journalière de gravier extraite, exprimée en tonnes, par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 600]$  par :

$$f(x) = (0,2x^2 + 30x) e^{-0,01x}$$

où  $x$  désigne le temps écoulé en jours depuis le début de l'exploitation du gisement.

**Partie A**

1. a. Démontrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 600]$ ,

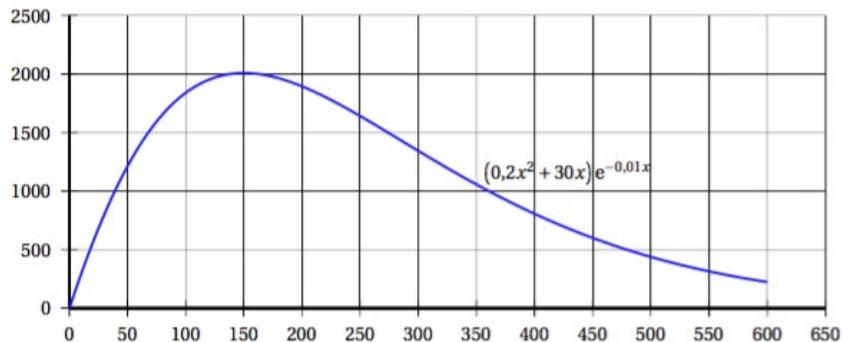
$$f'(x) = (-0,002x^2 + 0,1x + 30) e^{-0,01x}$$

- b. Vérifier que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 600]$ ,

$$f'(x) = 0,002(-x + 150)(x + 100) e^{-0,01x}$$

2. a. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0 ; 600]$ .  
 b. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 600]$ .  
 c. En déduire au bout de combien de jours la masse journalière de gravier extraite sera maximale.  
 Quelle est alors cette masse maximale, en tonnes?

3. La courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous :



Après avoir atteint son maximum, la masse journalière de gravier extraite diminue. Déterminer graphiquement au bout de combien de jours elle deviendra alors inférieure à 1 000 tonnes.

Répondre avec la précision permise par le graphique.

**Partie B**

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants :

|   |   |
|---|---|
| 1 | $f(x) = (0,2 * x^2 + 30 * x) * \exp(-0,01 * x)$ |
|   | $(0,2x^2 + 30x) \exp(-0,01x)$                   |
| 2 | intégrer $(f(x), x)$                            |
|   | $(-20x^2 - 7000x - 700000) \exp(-0,01x)$        |
| 3 | intégrer $(f(x), x, 0, 600)$                    |
|   | $-12100000 \exp(-6) + 700000$                   |
| 4 | approcher(intégrer $(f(x), x, 0, 600)$ )        |
|   | 670 007,098 662                                 |

1. a. Que représente le résultat fourni par le logiciel en ligne 2?  
 b. Une valeur approchée de la masse totale de gravier extraite, en tonnes, entre le début de l'exploitation et le 600<sup>e</sup> jour d'exploitation est donnée par :

$$I = \int_0^{600} f(x) dx.$$

**1b. vous utilisez le tableau ci-dessus  
 Vous ne savez pas trouver F.**

La commande pourra-t-elle être satisfaite au bout de 600 jours?

2. Le responsable du chantier d'extraction estime que la commande sera satisfaite au bout de 400 jours.  
 Qu'en pensez-vous? Justifier la réponse par un calcul.

**1a. Même si vous ne trouvez pas cette expression,  
 vous l'utilisez par la suite.**

**3. On vous donne Cf : vérifier que cela correspond  
 au tableau de variation trouvé en 2a.**